N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Semaine 07 – Colle du lundi 18/11 à 8h

Nom	Énoncé et commentaires	Note

1. **Python.** On tire n fois, avec remise, un entier pris au hasard, uniformément, entre 1 et p. On note $M_{n,p}$ le maximum des nombres obtenus.
   (a) **[Py]** Écrire un programme python `simul(n,p)` qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire $M_{n,p}$.
   (b) **[Py]** Faire la moyenne de 1000 appels de `simul(n,p)`. En déduire une estimation de l'espérance de $M_{n,p}$.
   (c) **[Py]** Que semble valoir la limite de $\dfrac{\mathbb{E}(M_{n,p})}{p}$ lorsque p tend vers $+\infty$? (on testera avec $n = 1, 2, 3, 4$ et on cherchera une formule en fonction de n)
   (d) Démontrer que $\mathbb{E}(M_{n,p}) = \displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}(M_{n,p} \geqslant k)$.
   (e) En introduisant $X_1, \ldots, X_n$ n v.a. indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, p]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(M_{n,p} \geqslant k)$.
   (f) En déduire la limite conjecturée de $\dfrac{\mathbb{E}(M_{n,p})}{p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

---

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Soit $m \in [\![1, n]\!]$. Soit Z telle que $Z = X$ si $Y \leqslant m$, et $Z = Y$ sinon.
   (a) Déterminer la loi de Z.
   (b) Calculer les espérances de X, Y et Z.
   (c) Pour quels entiers $m \in [\![1, n]\!]$ l'espérance $E(Z)$ est-elle maximale ?
2. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et X variable aléatoire vérifiant $|\mathrm{X}| \leqslant \mathrm{M}$ presque sûrement avec $\mathrm{M} \geqslant 0$. On suppose qu'il existe $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi telles que X et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ aient même loi. Montrer que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on a $\mathrm{X}_i \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{n}$ p.s. et $|\mathrm{X}_i| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{n}$ p.s. .
3. Soit $(U_i)_{i \in N^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. Soient N une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes des précédentes et X, Y les variables déterminées par $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} U_i$ et $Y = N - \displaystyle\sum_{i=1}^{N} U_i$.
   (a) Vérifier $\mathrm{P}(X = k, Y = \ell) = \dbinom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell \mathrm{P}(N = k + \ell)$ pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$.
   (b) On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

   Inversement, on suppose que les variables X et Y sont indépendantes et que la variable N n'est pas presque sûrement nulle. On pose $p_k = \mathrm{P}(X = k)$ et $q_\ell = \mathrm{P}(Y = \ell)$ pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$.
   (c) Justifier que les p_k et les q_ℓ sont tous strictement positifs.
   (d) Vérifier que
   $(k+1)p_{k+1}q_\ell(1-p) = (\ell+1)p_k q_{\ell+1} p$ pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$
   (e) En déduire une relation de récurrence sur les termes de la suite (p_k) puis identifier la loi suivie par X.
   (f) En déduire que N suit une loi de Poisson.

---

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si
$$X(\Omega) = \{n, n+1, \ldots\} \text{ et } \mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$
   (a) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p. Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale négatives de paramètres n et p.
   (b) En déduire l'espérance d'une loi binomiale négatives de paramètres n et p.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, la loi de Y conditionnée par $X = n$ est une loi binomiale de paramètres n et $p \in [0, 1]$.
   (a) Donner la loi de (X, Y).
   (b) Reconnaître la loi de Y.
   (c) Soit $Z = X - Y$. Donner la loi de Z.
   (d) X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres $p, q \in]0; 1[$. Calculer $\mathrm{P}(X < Y)$.