TD06
CORRECTION

Exercice 10 (suite) :

2) $Y-1 \sim \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y+1-1) = \mathbb{E}(Y-1)+1 \text{ par linéarité}$$
$$= \frac{3}{2}+1 = \frac{5}{2}$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(Y-1) = \frac{3^2}{3\times 2^2} = \frac{3}{4}$$

3) Y à valeurs dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$
Z " " " $\mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$

Soit $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$
$\ell\in\mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$

- $\mathbb{P}(Y=k, Z=\ell) = 0$ si $k\geq \ell$
- Sinon,

$$\mathbb{P}(Y=k,Z=\ell) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{3} \mathbb{P}(X_1=i,\dots,X_{k-1}=i, X_k=j, X_{k+1}\in\{i,j\},\dots,X_{\ell-1}\in\{i,j\}, X_\ell\notin\{i,j\})$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{3} \mathbb{P}(X_1=i)\dots\mathbb{P}(X_{k-1}=i)\,\mathbb{P}(X_k=j)\,\mathbb{P}(X_{k+1}\in\{i,j\}),\dots\,\mathbb{P}(X_{\ell-1}\in\{i,j\})\,\mathbb{P}(X_\ell\notin\{i,j\})$$
par indépendance

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-k-1}\frac{1}{3}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} 2^{\ell-k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-\cancel{1}+\cancel{1}+\ell-k-\cancel{1}+\cancel{1}} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{k}\frac{2^\ell}{3^{\ell-1}}$$

4) Soit $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$

$$\underline{\mathbb{P}(Z=\ell)} = \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k, Z=\ell)$$

$$= \sum_{k=2}^{\ell-1} \mathbb{P}(Y=k, Z=\ell)$$

$$= \sum_{k=2}^{\ell-1} 3 \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^\ell$$

$$= 3 \left(\frac{2}{3}\right)^\ell \sum_{k=2}^{\ell-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 3 \left(\frac{2}{3}\right)^\ell \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell-1-2+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\underline{= 3 \left(\frac{2}{3}\right)^\ell \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell-2}\right)}$$

Vérifions qu'on a une proba :

$$\underline{\sum_{\ell=3}^{+\infty} \mathbb{P}(Z=\ell)} = 3 \sum_{\ell=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^\ell \times \frac{1}{2} \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell-2}\right)$$

$$= 3\left(\sum_{\ell=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^\ell \frac{1}{2} - \sum_{\ell=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^\ell \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell-1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 2\sum_{\ell=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^\ell\right) \times 3$$

$$= \left(\frac{1}{2}\,\frac{8}{27} \times 3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^3 \frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) \times 3$$

$$= \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{9}\right) \times 3$$

$$\underline{= 1}$$

Exercice 9 :

$X_1, ..., X_n$ va indép
$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \sim \mathcal{G}(p)$

1) $\mathbb{P}(X_i > k) = (1-p)^k$

$$= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_i = j) \quad \text{(par } \sigma\text{-additivité)}$$

$$= \sum_{j=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{j-1}$$

$$= p \sum_{j=k+1}^{+\infty} (1-p)^{j-1}$$

$$= p \times (1-p)^k \times \frac{1}{1-1+p} = (1-p)^k$$

. $\mathbb{P}(X_i \leq k) = 1 - \mathbb{P}(X_i > k) = 1-(1-p)^k$

Posons $q = 1-p$, $\mathbb{P}(X_i \leq k) = 1-q^k$

2) $Y = \min(X_1, ..., X_n)$

(a) . $\mathbb{P}(\min(X_1, ..., X_n) > k) = \mathbb{P}(X_1 > k, ..., X_n > k)$
$= \mathbb{P}(X_1 > k) \dots \mathbb{P}(X_n > k)$ par indépendance
$= ((1-p)^k)^n = q^{nk}$

. $\mathbb{P}(Y \leq k) = 1 - \mathbb{P}(Y > k) = 1 - q^{nk}$

. $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y > k-1) - \mathbb{P}(Y > k) = q^{(k-1)n} - q^{nk}$
$= q^{n(k-1)}(1-q^n)$

(b) Comme Y est à valeurs dans $[0;+\infty[$, on peut calculer $\mathbb{E}(Y)$ et vérifier que Y est d'espérance finie

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(Y \geq k) \quad \text{car } Y \text{ est à valeurs ds } \mathbb{N}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(Y > k)$$

$$= \sum_{k\geq 0} (1-p)^{kn} = \sum_{k\geq 0} q^{kn}$$

$$= \underline{\frac{1}{1-q^n} = \mathbb{E}(Y)} \quad < +\infty$$

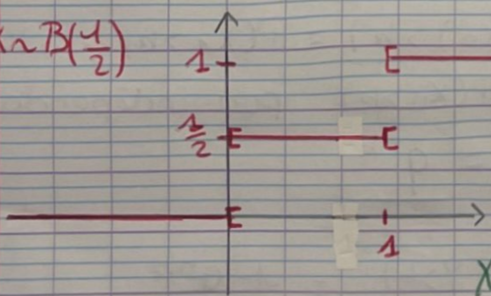
Donc Y d'espérance finie.

Fonct° de répartit° d'une va X

$$F : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \\ x \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x) \end{array} \right.$$

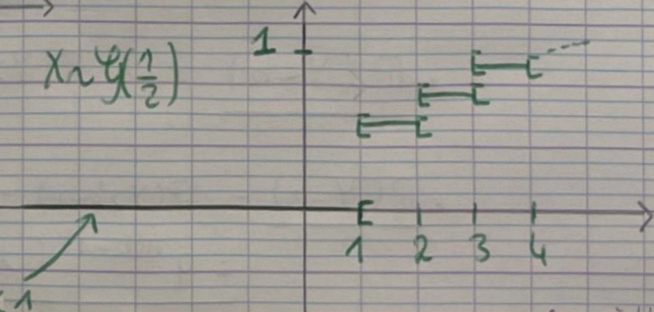
Représenter le graphe de F pour $\to X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ / $\to X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{2})$

$X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$



si $a \in [1,2[$
$\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}$

$X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{2})$



si $a \in [2,2[$
$\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X \leq 2)$
$= \frac{3}{4}$

si $a < 1$
$\mathbb{P}(X \leq a) = 0$
car X est à val. ds $\mathbb{N}^*$

(pas à l'échelle)