# TD 07
# Suites et séries de fonctions

## 1 Suites de fonctions

**Exercice 1.** *CCINP 24*. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \mapsto \sin\left(nx\mathrm{e}^{-nx^2}\right)$.

**1.** Montrer que cette suite de fonctions converge simplement sur $[-1,1]$.

**Correction**

Soit $x$ dans $[-1,1]$. Alors

- si $x=0$, $f_n(x)=0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
- si $x \neq 0$, $nx^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par croissances comparées,

$$\frac{1}{x}(nx^2)\mathrm{e}^{-nx^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc, par continuité de sin, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

**2.** Montrer que, pour tout $a \in ]0,1[$, la convergence est uniforme sur $[a,1]$.

**Correction**

Soit $a \in ]0,1[$. Alors pour tout $x$ dans $[a,1]$,

$$\begin{aligned}|f_n(x)| &= \left|\sin\left(nx\mathrm{e}^{-nx^2}\right)\right| \\ &\leqslant nx\mathrm{e}^{-nx^2} \\ &\leqslant n\mathrm{e}^{-na^2}.\end{aligned}$$

Ce dernier majorant est indépendant de $x$, donc

$$\|f_n\|_\infty^{[a,1]} \leqslant n\mathrm{e}^{-na^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

**3.** La convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$ ?

**Correction**

Posons $x_n = \dfrac{1}{n}$. Alors

$$f_n(x_n) = 1 \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}},$$

donc, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty^{[0,1]} \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi $(\|f_n\|_\infty^{[0,1]})_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 : la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

**Exercice 2.** *CCINP 24*. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geqslant 0$, $\dfrac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.

**1.** Montrer que $(f_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on précisera.

**Correction**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- si $x \geqslant 0$, $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$,
- si $x < 0$, $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f : x \mapsto x$. Vérifions que la convergence est uniforme. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

- si $x \geqslant 0$,

$$|f_n(x) - x| = \left|\frac{nx^2}{1+nx} - x\right| = \left|\frac{nx^2 - x - nx^2}{1+nx}\right| = \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n}\frac{x}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}.$$

- si $x < 0$,

$$|f_n(x) - x| = \left|\frac{nx^3}{1+nx^2} - x\right| = \left|\frac{nx^3 - x^2 - nx^3}{1+nx^2}\right| = \frac{x^2}{1+nx^2} = \frac{1}{n}\frac{x^2}{x^2+\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}.$$

On en déduit que $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La convergence est donc uniforme.

**2.** Démontrer que $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier la convergence de $(f_n')$.

**Correction**

Déjà, $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Mais

- $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{2nx(1+nx) - nx^2 n}{(1+nx)^2} \\ &= \frac{2nx + 2n^2x^2 - n^2x^2}{(1+nx)^2} \\ &= \frac{2nx + n^2x^2}{(1+nx)^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

- $\forall x < 0$,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{3nx^2(1+nx^2) - nx^3 2nx}{(1+nx^2)^2} \\ &= \frac{3nx^2 + n^2x^4}{(1+nx^2)^2} \\ &\underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Donc $f_n$ est **continue sur** $\mathbb{R}$, **dérivable sur** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, et $f_n'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc, par le théorème du prolongement du caractère $\mathscr{C}^1$, $f_n$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(0) = 0$.
On étudie ensuite la convergence de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.
**Soit** $x \in \mathbb{R}$.

- si $x \geqslant 0$,

$$f_n'(x) = \frac{2nx + n^2x^2}{(1+nx)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2x^2}{n^2x^2} = 1.$$

- si $x < 0$,

$$f_n'(x) = \frac{3nx^2 + n^2x^4}{(1+nx^2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2x^4}{n^2x^4} = 1$$

Donc $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction

$$g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

La fonction limite n'étant pas continue, la convergence ne peut pas être uniforme.

**Exercice 3.** *CCINP 24*. On considère une suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par : $u_0(x) = 1$ et $u_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x u_n\left(t - t^3\right) \mathrm{d}t$.

**1.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

**Correction**

Démontrons le résultat par récurrence sur $n$.
**Initialisation.** $u_0$ est la fonction constante égale à 1 donc est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$.
**Hérédité.** Soit $n$ dans $\mathbb{N}$. On suppose que $u_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$. Par composition, $t \mapsto u_n(t-t^3)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$ donc, en tant que primitive d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$, $x \mapsto 1 + \displaystyle\int_0^x u_n(t-t^3)dt = u_{n+1}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$.
L'**hérédité** est donc démontrée, le résultat aussi par le principe de récurrence.

**2.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

**Correction**

Démontrons par récurrence sur $n$ la proposition suivante

$$\forall x \in [0,1], 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

**Initialisation.** Soit $x \in [0,1]$. Alors

$$u_1(x) = 1 + \int_0^x 1dt = 1 + x.$$

Ainsi, comme $u_{n+1}(x) - u_n(x) = x$, on a bien

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^1}{1!}.$$

**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition est vraie. Soit $x \in [0,1]$. Alors

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x u_{n+1}(t-t^3) - u_n(t-t^3)dt$$

Or, par hypothèse de récurrence, pour tout $t$ dans $[0,1]$,

$$0 \leqslant u_{n+1}(t-t^3) - u_n(t-t^3) \leqslant \frac{(t-t^3)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}(1-t^2)^{n+1} \leqslant \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

Donc, en intégrant les inégalités,

$$0 \leqslant u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}.$$

D'où l'hérédité et le résultat !

**3.** En déduire que la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

**Correction**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1]$. Alors

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leqslant \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{(n+1)!},$$

indépendant de $x$. Donc $\|u_{n+1} - u_n\|_\infty^{[0,1]} \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$, terme général d'une série convergente. Donc la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

**4.** Établir la convergence de $(u_n)$ vers une fonction $f$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$, non nulle et vérifiant : $f'(x) = f\left(x - x^3\right)$.

**Correction**

On sait que la série de fonctions $\sum u_{n+1} - u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$, ce qui signifie que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$, i.e. que $(u_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$, ou encore que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k+1} - u_k$.

De plus, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour $n \geqslant 1$, $x \in [0, 1]$,

$$(u_{n+1} - u_n)'(x) = u_n(x - x^3) - u_{n-1}(x - x^3).$$

(de plus, $(u_1 - u_0)' = u_0$). On en déduit facilement que

$$\|(u_{n+1} - u_n)'\|_\infty^{[0,1]} \leqslant \|u_n - u_{n-1}\|_\infty^{[0,1]}.$$

Comme $\sum_{n\geqslant 1} \|u_n - u_{n-1}\|_\infty^{[0,1]}$ converge, on en déduit que $\sum \|(u_{n+1} - u_n)'\|_\infty^{[0,1]}$ converge, donc $\sum (u_{n+1} - u_n)'$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$, donc $\sum_{n\geqslant 0} u_{n+1} - u_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$. Il en est donc de même pour $f$.

De plus, pour tout $x$ dans $[0, 1]$, $u'_{n+1}(x) = u_n(x - x^3)$.

Déjà, $u'_{n+1}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'(x)$. Ensuite, par convergence uniforme, $u_n(x - x^3) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x - x^3)$. On en déduit donc que $f'(x) = f(x - x^3)$.

**Exercice 4.** *Mines-Telecom 24*. **1.** Soit $(g_n)$ une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbf{N} g_n$ est bornée et $(g_n)$ converge uniformément vers une fonction $g$. Montrer que $g$ est bornée.

**Correction**

La définition de la convergence uniforme assure que $\|g_n - g\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ; en particulier, elle présuppose que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $g_n - g$ est bornée.
On en déduit, en particulier, que $g_0 - g$ est bornée, donc que $g = g_0 - (g_0 - g)$ est bornée.

**2.** On considère $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \begin{cases} nx^2 & \text{si } |x| < \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > \dfrac{1}{n} \end{cases}$ Montrer que $(f_n)$ converge simplement vers une fonction $f$. $(f_n)$ converge-t-elle uniformément ?

**Correction**

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors pour $n \geqslant \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ assez grand, $x > \dfrac{1}{n}$ donc, pour $n \geqslant \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$, $f_n(x) = \dfrac{1}{x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{x}$.
Ensuite, $f_n(0) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si x} \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

Cette limite n'est ni continue, ni bornée donc la convergence ne peut pas être uniforme.

**Exercice 5.** *Mines-Ponts 23*. On définit la suite de fonctions $(p_n)$ par $p_0 : x \in [0,1] \mapsto 0$ et $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1}(x) = p_n(x) + \dfrac{1}{2}\left(x - (p_n(x))^2\right)$

**1.** Montrer que $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, p_n(x) \leqslant p_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x}$.

**Correction**

**A CORRIGER, J'AI PRIS $p_0(x) = x$.** On fixe $x$ dans $[0,1]$, et on démontre ce résultat par récurrence sur $n$.
**Initialisation.** $p_0(x) = x$ et

$$p_1(x) = p_0(x) + \frac{1}{2}(x - p_0(x)^2) = x + \frac{1}{2}(x - x^2)$$

Comme $x \in [0,1]$, $x - x^2 \geqslant 0$ donc $p_0(x) \leqslant p_1(x)$. Ensuite, on a l'équivalence

$$\begin{aligned} p_1(x) \leqslant \sqrt{x} &\Leftrightarrow x + \frac{1}{2}(x - x^2) \leqslant \sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - x^2) \leqslant \sqrt{x} - x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{x} - x)(\sqrt{x} + x) \leqslant \sqrt{x} - x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{x} + x) \leqslant 1 \text{ on a supposé } x \neq 0 \text{ ou } 1 \text{ sinon tout est trivial} \end{aligned}$$

ce qui est clairement vrai car $x \in [0,1]$. D'où l'initialisation.
**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_n(x) \leqslant p_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x}$. Alors

$$p_{n+2}(x) = p_{n+1}(x) + \frac{1}{2}\left(x - (p_{n+1}(x))^2\right) \geqslant p_{n+1}(x),$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

car, par hypothèse, $p_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x}$. Ensuite, on a les équivalences

$$\begin{aligned} p_{n+2}(x) \leqslant \sqrt{x} &\Leftrightarrow p_{n+1}(x) + \frac{1}{2}\left(x - (p_{n+1}(x))^2\right) \leqslant \sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x - (p_{n+1}(x))^2\right) \leqslant \sqrt{x} - p_{n+1}(x) \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + p_{n+1}(x)}{2} \leqslant 1, \end{aligned}$$

en ayant supposé $p_{n+1}(x) < \sqrt{x}$, sinon tout est évident. Mais $p_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$ donc le résultat est vrai, d'où l'hérédité et le résultat.

**2.** En déduire la convergence simple de la suite $(p_n)$ et trouver sa limite.

**Correction**

Soit $x \in [0,1]$. La suite $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majoré par $\sqrt{x}$ ; elle converge donc vers $\ell(x) \in [0,1]$. Or, comme $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (p_n(x))^2\right)$,

$$\ell(x) = \ell(x) + \frac{1}{2}(x - \ell(x)^2), \text{ donc } \ell(x)^2 = x, \text{ donc } \ell(x) = \sqrt{x},$$

car $\ell(x) \geqslant 0$. Donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $x \mapsto \sqrt{x}$.

**3.** Montrer que la suite converge uniformément sur $[0,1]$.

*Indication. On montrera que pour tout n dans* $\mathbb{N}$, $0 \leqslant \sqrt{x} - p_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$.

**Correction**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) - \sqrt{x} &= p_n(x) - \sqrt{x} + \frac{1}{2}\left(x - (p_n(x))^2\right) \\ &= p_n(x) - \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x))\right), \end{aligned}$$

donc

$$|p_{n+1}(x) - \sqrt{x}| \leqslant \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x))\right)|p_n(x) - \sqrt{x}|.$$

Mais $p_n(x) \geqslant 0$ (récurrence immédiate) donc $\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x))\right) \leqslant \mathbb{1} - \frac{\sqrt{x}}{2}$ donc

$$|p_{n+1}(x) - \sqrt{x}| \leqslant \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)|p_n(x) - \sqrt{x}|,$$

donc, par récurrence immédiate,

$$|p_n(x) - \sqrt{x}| \leqslant \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n |p_0(x) - \sqrt{x}| = \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

Il nous reste à démontrer que si $u_n : x \mapsto \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dérive,

$$\begin{aligned} u_n'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n + \sqrt{x} \times \frac{-1}{4\sqrt{x}} n \left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4} - \frac{n}{4}\right)\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

La dérivée de $u_n$ s'annule en $x = \dfrac{4}{(n+1)^2}$. $u_n'$ est positive avant, négative ensuite. Donc $u_n$ (qui est positive) atteint son maximum en $\dfrac{4}{(n+1)^2}$ : ce maximum vaut

$$\frac{2}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2e}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi,

$$|p_n(x) - \sqrt{x}| \leqslant \|u_n\|_\infty^{[0,1]},$$

indépendante de $x$ et tendant vers 0 en $+\infty$. Ainsi, $(p_n)$ converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$.

**Exercice 6.** *CVS + Lipschitzienne = CVU*. Soit $(f_n)_{n\in N}$ une suite de fonctions $K$-lipschitziennes sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement vers une fonction $f$ sur $[0,1]$.

**1.** Montrer que $f$ est $K$-lipschitzienne sur $[0,1]$.

**Correction**

Soient $x$ et $y$ dans $[0,1]$. Alors pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant K|x-y|$. En faisant tendre $n$ vers $+\infty$ et par passage à la limite dans les inégalités larges, on obtient $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$.

**2.** (*) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\,\mathrm{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.

**Correction**

C'est plus délicat (et à la limite du programme de PSI). Soit $\varepsilon > 0$. On prend $p > \dfrac{K}{\varepsilon}$ et on pose $x_0, \dots, x_p$ les $p+1$ réels de $[0,1]$ définis par $x_i = \dfrac{i}{p}$ (on a découpé $[0,1]$ en petits intervalles de taille $\leqslant \varepsilon$).
On sait que pour tout $i$, $f_n(x_i) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_i)$. On dispose donc de $N_i$ tel que pour $n \geqslant N_i$, $|f_n(x_i) - f(x_i)| \leqslant \varepsilon$.
Posons $N = \max(N_0, \dots, N_p)$. Alors pour $n \geqslant N$, $|f_n(x_i) - f(x_i)| \leqslant \varepsilon$. Soit maintenant $x$ quelconque dans $[0,1]$. Alors on dispose de $i$ tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Ainsi, $|x - x_i| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{K}$.
On a donc

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_n(x_i) + f_n(x_i) - f(x_i) + f(x_i) - f(x)| \\ &\leqslant |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \\ &\leqslant K|x - x_i| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + K|x_i - x| \\ &\leqslant K|x - x_i| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + K|x_i - x| \\ &\leqslant 3\varepsilon, \end{aligned}$$

Donc on a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall x \in [0,1],\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant 3\varepsilon$, ce qui est exactement la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f$.

## 2 Séries de fonctions

**Exercice 7.** *CCINP 24*. Soit $S(x) = \sum_{n \geqslant 2} \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$. On note $u_n : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

**1.** Déterminer le domaine $D$ de convergence cette série de fonctions.

**Correction**

Soit $x > 0$.

- si $x < 1$, alors $\frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc la série de terme général $\frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$ diverge grossièrement.
- si $x > 1$, $0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)} \leqslant \frac{1}{x^n}$ à partir d'un certain rang, terme général d'une série géométrique convergente. Donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum n \geqslant 2 \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$ converge.
- si $x = 1$, alors $\frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)} = 0$, terme général d'une série convergente.

On en déduit que le domaine de convergence de la série de fonctions $S$ est $[1, +\infty[$.

**2.** Y a-t-il convergence normale sur $D$ ?

**Correction**

*Commentaire. À vue de nez, on se dit qu'il ne va pas y avoir de convergence normale. Pourquoi ? Parce que quand $x$ se rapproche de 1, le dénominateur ressemble à* $\ln(n)$ *et* $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ *diverge. Alors, oui,* $\ln(x) \to 0$ *mais on peut se dire qu'il va difficilement y avoir une bonne compensation.*

Notons $u_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$. Alors

$$u_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}.n\ln(n)}.$$

Or, on redémontre que la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge. Soit $n \geqslant 2$. Alors pour $t$ dans $[n, n+1]$, $\dfrac{1}{t\ln(t)} \leqslant \dfrac{1}{n\ln(n)}$ d'où

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t\ln(t)} \leqslant \frac{1}{n\ln(n)},$$

donc, pour $N \geqslant 2$,

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{t\ln(t)} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\ln(n)},$$

i.e.

$$\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2)) \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\ln(n)},$$

d'où, par minoration, $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\ln(n)} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, comme $\|u_n\|_\infty^{[1,+\infty} \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}.n\ln(n)}$, il n'y a pas convergence normale de la série. Il n'y a donc pas de convergence normale.

**3.** Montrer que : $\forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

**Correction**

Soit $x \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|\ln(x)|}{x^k \ln(k)} \\ &\leqslant \ln(x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^k \ln(k)} \\ &\leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^k} \\ &\leqslant \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{\ln(x)}{x^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \\ &\leqslant \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{1}{x^n} \frac{\ln(x)}{x-1} \\ &\leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}.\end{aligned}$$

Le résultat est ainsi démontré.

**4.** Montrer que $S$ est continue sur $D$. Est-elle intégrable ?

**Correction**

La question précédente assure que la série de fonctions $\sum u_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, car son reste converge uniformément vers 0. Chaque $u_k$ étant continue, $S$ est continue sur $D$.
La fonction $S$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Cherchons un équivalent en $+\infty$. On remarque que

$$S(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)x^2} + \sum_{k \geqslant 3} \frac{\ln(x)}{x^k \ln(k)}$$

Or, le même raisonnement que précédemment montre que

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)x^n}.$$

Donc

$$\left|\sum_{k \geqslant 3} \frac{\ln(x)}{x^k \ln(k)}\right| \leqslant \frac{1}{\ln(3)x^3} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)x^2}\right),$$

donc $S(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)x^2} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$, intégrable en $+\infty$.

**Exercice 8.** *Mines-Telecom 24*. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$. Montrer que $f$ est définie et de continue sur $\mathbb{R}$. Étudier sa dérivabilité sur $\mathbb{R}$.
*Pour la dérivabilité en* 0*, on pourra essayer de minorer, au voisinage de* 0*,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n'(x)$ *par* $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

**Correction**

Notons, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, $u_n : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(nx)}{n^2}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\left|\frac{\operatorname{Arctan}(nx)}{n^2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2n^2},$$

donc $u_n$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{\pi}{2n^2}$, terme général d'une série convergente. Donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, donc $f$ est définie sur $\mathbb{R}$. Comme chaque $u_n$ est continue, $f$ est continue.
Ensuite, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $u_n$ est $\mathscr{C}^1$ et pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$,

$$u_n'(x) = \frac{n}{(1+n^2x^2)n^2} = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}.$$

*Problème, on n'a pas de convergence normale !* Soit $(a, b)$ tels que $0 < a < b$. Soit $x \in [a, b]$ Alors

$$|u_n'(x)| \leqslant \frac{1}{n(1+n^2a^2)} \leqslant \frac{1}{a^2n^3},$$

indépendant de $x$. Donc $\|u_n'\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \dfrac{1}{an^3}$, terme général d'une série de Riemann convergente, donc $\sum u_n'$ converge normalement sur $[a, b]$, ce qui assure le caractère $\mathscr{C}^1$ de $f$ sur $[a, b]$.
$f$ est donc $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$. Par imparité, $f$ est aussi $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$.
Reste à voir le problème en 0. On étudie

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(nx)}{n^2x}$$

*On remarque que* $\operatorname{Arctan}(nx) \underset{x\to 0}{\sim} nx$ *donc on a envie de dire que l'on se ramène à* $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$*, pas très convergente...* Il faut donc **minorer** $\dfrac{\operatorname{Arctan}(nx)}{n^2x}$ par quelque chose d'indépendant de $x$.
Soit $N \in \mathbb{N}$. Comme $\dfrac{\operatorname{Arctan}(t)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1 > \dfrac{1}{2}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\dfrac{\operatorname{Arctan}(t)}{t} > \dfrac{1}{2}$. Alors, pour tout $x$ dans $\left[-\dfrac{\varepsilon}{N}, \dfrac{\varepsilon}{N}\right]$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\operatorname{Arctan}(nx)}{n^2x} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

On va donc démontrer que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$. Soit $M > 0$. Soit $N$ tel que $\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\dfrac{1}{k} \geqslant M$. Alors pour tout $x$ dans $\left[-\dfrac{\varepsilon}{N}, \dfrac{\varepsilon}{N}\right]$,

$$\frac{f(x)}{x} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\operatorname{Arctan}(nx)}{n^2x} \geqslant M,$$

ce qui signifie que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$, donc que $f$ n'est pas dérivable en 0.

**Exercice 9.** *Mines-Télécom 24*. **1.** Justifier la convergence de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$ pour tout $x > 0$.

**Correction**

Notons, pour tout $x > 0$, $u_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$. Soit $x > 0$. Alors

$$\frac{1}{n+n^2x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x},$$

terme général d'une série de Riemann convergente. Donc la série de terme général $u_n(x)$ converge.

**2.** Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

**Correction**

Déjà, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $u_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $u_n'(x) = -\frac{n^2}{(n+n^2x)^2}$. On remarque immédiatement que $\|u_n'\|_\infty^{]0,+\infty[} = 1$, donc on n'a pas de convergence normale.
Soit $[a,b] \subset ]0,+\infty[$. Alors pour tout $x$ dans $[a,b]$,

$$|u_n'(x)| \leqslant \frac{n^2}{(n+n^2a)^2} \leqslant \frac{1}{an^2},$$

donc $u_n'$ est bornée sur $[a,b]$ et $\|u_n'\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{1}{an^2}$, terme général d'une série convergente.
Donc $\sum u_n'$ converge normalement sur $[a,b]$ donc, par théorème de régularité, $\sum u_n$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
Donc $\sum u_n$ est $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de $]0,+\infty[$ donc $\sum u_n$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

**3.** Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que : $\forall x > 0$, $\left|f(x) - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right| \leqslant \frac{K}{x^2}$. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$, en admettant $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

**Correction**

Soit $x > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right| &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+n^2x} - \frac{1}{xn^2}\right| \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+n^2x)xn^2} \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2xxn^2} \\
&\leqslant \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = \frac{K}{x^2},
\end{aligned}$$

en notant $K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.
On en déduit que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{\pi^2}{6x}}$$

**4.** (* Question + difficile, rajoutée par mes soins)

(a) Calculer, pour $A > 1$, $\int_1^A \frac{1}{t(1+tx)}dt$ et déterminer la valeur de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)}$.

**Correction**

On remarque que

$$\frac{1}{t(1+tx)} = \frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx},$$

donc

$$\begin{aligned}\int_1^A \frac{1}{t(1+tx)}dt &= \int_1^A \frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}dt \\ &= \ln(A) - [\ln(1+tx)]_1^A \\ &= \ln(A) - \ln(1+Ax) + \ln(1+x) \\ &= -\ln\left(\frac{1}{A} + x\right) + \ln(1+x)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{1}{t(1+tx)}dt = \ln(1+x) - \ln(x).$$

(b) En justifiant que, pour $x$ fixé, $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t+t^2x} \leqslant \frac{1}{n+n^2x} \leqslant \int_{n-1}^n \frac{dt}{t+t^2x}$, déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x$ tend vers 0.

**Correction**

Soit $x > 0$ et $n \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t+t^2x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc pour tout $t$ dans $[n, n+1]$, $\frac{1}{t+t^2x} \leqslant \frac{1}{n+n^2x}$. Ainsi, en intégrant,

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t+t^2x} \leqslant \frac{1}{n+n^2x}.$$

On obtient l'autre inégalité de la même manière l'autre inégalité, en travaillant sur $[n-1, n]$. Ainsi

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t+t^2x} \leqslant \frac{1}{n+n^2x} \leqslant \int_{n-1}^n \frac{dt}{t+t^2x}$$

En sommant, pour $n$ allant de 2 à $+\infty$ (ce qui est licite car la série du milieu est convergente et les deux intégrales de gauche et de droite aussi),

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2x} \leqslant f(x) - \frac{1}{1+x} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2x} = -\ln(x) + \ln(1+x).$$

Étudions chaque membre de l'inégalité :

- déjà, $-\ln(x)+\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$,
- ensuite, $-\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $-\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} o(-\ln(x))$,
- enfin, en adaptant le calcul de la question précédente,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2x} = -\ln(x)-\ln(2)+\ln(1+2x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x).$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$.

**Exercice 10.** *Mines-Ponts 24*. **1.** Montrer que $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ converge simplement pour tout $x>0$.

**Correction**

Soit $x>0$. Alors la suite $\left(\dfrac{1}{n+x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et tend vers 0 donc, d'après le critère des séries alternées, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ converge. Donc la série de fonction $S$ converge simplement en tout point de $]0,+\infty[$.

**2.** Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $]0,+\infty[$. Qu'en déduit-on quand $x$ tend vers $+\infty$ ?

**Correction**

Pour montrer la convergence d'une série alternée, **on majore le reste.** On sait, le critère des séries alternées, que

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1+x} \leqslant \frac{1}{n+1},$$

indépendant de $x$, donc $R_n$ est bornée et $\|R_n\|_\infty^{]0,+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où la convergence uniforme.

**3.** Montrer qu'il y a en fait convergence uniforme sur tout segment ne contenant pas d'entier négatif ou nul.

**Correction**

Soit $[a,b]$ un segment ne contenant pas d'entier négatif ou nul. Déjà, si $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$, le résultat a été démontré.
Ensuite, si $[a,b]\subset]-\infty,0[$, alors on note $k\in\mathbb{Z}_-$, $k=-p$, vérifiant $[a,b]\subset]k,k+1[$. On remarque alors que la suite $\left(\dfrac{1}{n+x}\right)_{n\geqslant p}$ est positive, décroissante et tend vers 0 donc, par le critère des séries alternées, $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ converge simplement. Donc $S$ converge simplement.

Ensuite, à partir du rang $p$, on a l'estimation du reste

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1+x} \leqslant \frac{1}{n+1+a},$$

indépendant de $x \in [a,b]$, donc $R_n$ est bornée et $\|R_n\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où la convergence uniforme.

**4.** Montrer que $S$ est dérivable en tout point de convergence.

**Correction**

On note $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x}$. $u_n$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ et pour x dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$,

$$u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+x)^2}.$$

Ensuite, exactement le même raisonnement que précédemment montre que $\sum u_n'$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$ et sur tout segment ne contenant pas d'entier négatif ou nul, donc $S$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$.

**Exercice 11.** *Un peu de complexes*. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, calculer $\mathrm{I}_k = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{2+\mathrm{e}^{i\theta}} \mathrm{d}\theta$.

**Correction**

On écrit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_k &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{2+\mathrm{e}^{i\theta}} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{1+\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{2}} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ik\theta} \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{2^n} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{i(n+k)\theta}}{2^n} d\theta.
\end{aligned}$$

On pose, pour tout $\theta$ dans $[0,2\pi]$, $u_n(\theta) = (-1)^n \dfrac{\mathrm{e}^{i(n+k)\theta}}{2^n}$. Alors on remarque que $\|u_n\|_\infty^{[0,2\pi]} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, terme général d'une série convergente. Donc $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,2\pi]$, donc uniformément. Ainsi,

$$\mathrm{I}_k = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{i(n+k)\theta}}{2^n} d\theta$$

Or,

- si $k \in \mathbb{N}^*$, alors $n+k \neq 0$ et

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{i(n+k)\theta}}{2^n} d\theta = \frac{1}{2^n}\left[\frac{\mathrm{e}^{i(n+k)\theta}}{i(n+k)}\right]_0^{2\pi} = 0,$$

  donc $\mathrm{I}_k = 0$.

- si $k \leqslant 0$
  - si $n \neq -k$, alors on a aussi $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n+k)\theta}}{2^n} d\theta = 0$,
  - si $n = -k$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n+k)\theta}}{2^n} d\theta = \frac{2\pi}{2^n} = 2^{k+1}\pi$.

  Ainsi, $\mathrm{I}_k = \dfrac{1}{2}(-1)^{-k}2^{k+1}\pi = (-1)^{-k}2^k\pi$.

**Exercice 12.** On pose

$$\forall x > -1 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right]$$

**1.** Montrer que S est définie, continue sur $\mathrm{I} = ]-1, +\infty[$.

**Correction**

On pose, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$ et $x \in \mathrm{I}$, $u_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$. Or, pour $x > -1$,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc $S$ est bien définie sur $\mathrm{I}$. Soit $a \in ]-1, 0]$ et $b \geqslant 0$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{b}{n(n+a)} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ceci assure la convergence normale, donc uniforme, sur tout segment $[a, b]$ avec $-1 < a \leqslant 0 \leqslant b$, donc sur tout segment de $\mathrm{I}$. Comme $u_n$ est continue pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, on en déduit que $S$ est définie et continue sur $\mathrm{I}$.

**2.** Calculer $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x)$ pour $x \in \mathrm{I}$.

**Correction**

Par linéarité de la somme d'une série,

$$\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right]$$

Par télescopage, on en déduit que $\forall x \in \mathrm{I} \quad \mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

**3.** Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to -1$.

**Correction**

Par continuité de $S$ sur $\mathrm{I}$ , il vient $\mathrm{S}(x+1) \underset{x\to-1}{\longrightarrow} \mathrm{S}(0) = 0$ d'où $\mathrm{S}(x+1) \underset{x\to-1}{=} O\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$.

On en déduit donc que $\mathrm{S}(x) \underset{x\to-1}{\sim} -\dfrac{1}{x+1}$.

**Exercice 13.** *Navale 2024*. On pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n^{x+1}}$ et $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

**1.** Déterminer $D$, ensemble de définition de $f$.

**Correction**

Soit $x \in \mathbb{R}$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^{x+1}}$ converge si et seulement si $x + 1 > 1$, i.e. $x > 0$.

Ensuite, si $x=0$, $f_n(x)=0$ donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.
L'ensemble $D$ de définition de $f$ est donc $[1,+\infty[$.

**2.** Sur quel intervalle $f$ est-elle continue ?

**Correction**

Déjà, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, $x\mapsto \dfrac{x}{n^{x+1}}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
Ensuite, il faut s'intéresser au type de convergence de la série de fonctions.
**On montre déjà que $f$ est continue sur** $]0,+\infty[$. Soient $(a,b)\in ]0,+\infty[^2$ tels que $a<b$. Soit $x\in[a,b]$. Alors

$$|f_n(x)|\leqslant \frac{b}{n^{a+1}},$$

qui est indépendant de $x$ et qui est le terme général d'une série convergente. On en déduit que $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$, donc $f$ est continue sur $[a,b]$. Comme $[a,b]$ est un segment quelconque de $]0,+\infty[$, on en déduit que $f$ est continue sur $]0,+\infty[$.
**Continuité de $f$ en 0.** Soit $n\in\mathbb{N}$. $f_n$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f_n'(x)=\frac{n^{x+1}-x\ln(n)n^{x+1}}{n^{2x+1}},$$

fonction qui s'annule en $x=\dfrac{1}{\ln(n)}$ (si $n\geqslant 2$). donc $f_n$ est croissante jusqu'en $\dfrac{1}{\ln(n)}$, décroissante ensuite et atteint son maximum en $\dfrac{1}{\ln(n)}$, égal à

$$\frac{1}{\ln(n)n^{1+\frac{1}{\ln(n)}}}=\frac{1}{\ln(n).n.\mathrm{e}},$$

donc il n'y a pas de convergence normale. Comme on s'intéresse juste à la continuité en un point, il faut paraître malin de chercher un équivalent de $f$ en $0^+$. On montre, par comparaison série-intégrale, que

$$\frac{x}{(n+1)^{x+1}}\leqslant \int_n^{n+1}\frac{x}{t^{x+1}}dt\leqslant \frac{x}{n^{x+1}},$$

donc, en sommant de 1 à $+\infty$,

$$f(x)-x\leqslant \int_1^{+\infty} xt^{-x-1}dt\leqslant f(x),$$

donc

$$f(x)-x\leqslant 1\leqslant f(x),$$

d'où $1\leqslant f(x)\leqslant 1+x$ donc, par encadrement, $f(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1\neq f(0)$, donc $f$ n'est pas continue en 0.

**Exercice 14.** *Centrale PC 2024*. Pour $x\in\mathbb{R}^{+*}$, on pose $F(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$.

**1.** Montrer que $F$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

**Correction**

**Montrons que $F$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.** Soit $x > 0$ Alors la suite $\left(\frac{1}{n+x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue, décroissante et tend vers 0 donc, d'après le critère des séries alternées, la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n+x}$ converge. Donc $F(x)$ est définie.

**Caractère $\mathscr{C}^\infty$.** Notons $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n$, $u_n$ est $k$ fois dérivable et

$$u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{n+k+1}k!}{(n+x)^{k+1}},$$

terme général d'une série convergeant simplement, toujours par le critère des séries alternées. Montrons maintenant la convergence uniforme de $\sum u_n^{(k)}$. Notons $R_N(x) = \sum_{n\geqslant N+1} u_n^{(k)}(x)$, le reste d'ordre $N$. Par le théorème des séries alternées,

$$|R_N(x)| \leqslant \frac{k!}{(x+N+1)^{k+1}} \leqslant \frac{k!}{(N+1)^{k+1}},$$

quantité indépendante de $x$ et qui tend vers 0 quand $N$ tend vers $+\infty$. Donc $(R_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0, d'où la convergence uniforme de $\sum u_n^{(k)}$ et, par théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une série de fonctions, le résultat.

**2.** Établir une relation entre $F(x+1)$ et $F(x)$.

**Correction**

Soit $x > 0$. Alors

$$F(x+1) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+x+1} = \sum_{m\geqslant 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m+x} = -\sum_{m\geqslant 1} \frac{(-1)^m}{m+x} = \frac{1}{x} - \sum_{m\geqslant 0} \frac{(-1)^m}{m+x},$$

donc

$$F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}.$$

**3.** Donner un équivalent de $F$ en 0 et en $+\infty$.

**Correction**

**En** 0. On sait que $F$ est continue en 1 donc $F(x+1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} F(1) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$, donc

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

En $+\infty$, *on a envie de dire que* $F(x) + F(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2F(x)$ *et donc* $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$. *C'est très faux ainsi...* En revanche,

$$F'(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2},$$

du signe de $\frac{-1}{x^2}$, i.e. négatif. Donc $F$ décroît. Donc

$$2F(x+1) \leqslant F(x) + F(x+1) \leqslant 2F(x),$$

 nlaillet.math@gmail.com

donc
$$2F(x+1) \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 2F(x),$$
ce qui signifie que $\frac{1}{x} \leqslant 2F(x) \leqslant \frac{1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$. Finalement, $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

**Exercice 15.** *X PC 2023*. On pose $g : x \mapsto \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2}$.

**1.** Montrer que $g$ est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

**Correction**

Notons, pour tout $x$ dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{2x}{n^2-x^2}$. Alors
$$u_n(x) = \frac{2x}{n^2-x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{n^2},$$
terme général d'une série de Riemann convergente. Donc $g$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
Ensuite, $u_n$ est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Soit désormais $[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Alors pour $x$ dans $[a,b]$, si on note $m = \min(|a|,|b|)$ et $M = \max(|a|,|b|)$,
$$\left|\frac{2x}{n^2-x^2}\right| \leqslant \frac{2M}{n^2-m^2},$$
constante indépendante de $x$ et qui est, par comparaison à une série de Riemann, le terme général d'une série convergente. Donc $\sum u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[a,b]$ donc $g$ est continue sur $[a,b]$ Comme $[a,b]$ est un segment quelconque de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on en déduit que $g$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

**2.** Montrer que $g$ est 1-périodique.

**Correction**

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Remarquons déjà que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}.$$
De plus, $x+1 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et
$$\begin{aligned}
g(x+1)-g(x) &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n-x-1} - \frac{1}{n+x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \\
&= -\frac{1}{(x+1)x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n-x-1} - \frac{1}{n+x} + \frac{1}{n+x+1} \\
&= -\frac{1}{(x+1)x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n-x} + \frac{1}{n+x+1} - \frac{1}{n-x-1} - \frac{1}{n+x} \\
&= -\frac{1}{(x+1)x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{(n-x)(n+x+1)} - \frac{2n-1}{(n-x-1)(n+x)} \\
&= -\frac{1}{(x+1)x} - \frac{1}{(-x)(1+x)} \text{ par télescopage.} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

d'où la périodicité.

**3.** Établir une relation entre $g\left(\dfrac{x}{2}\right)+g\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ et $g(x)$ dès que les termes font sens.

 nlaillet.math@gmail.com

**Correction**

On utilise encore que

$$g(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{2}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n-\frac{x}{2}} - \frac{1}{n+\frac{x}{2}} \\ &= \frac{2}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-x} - \frac{2}{2n+x}, \end{aligned}$$

et, de même,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \frac{2}{x+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n-\frac{x+1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{x+1}{2}} \\ &= \frac{2}{x+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1-x} - \frac{2}{2n+1+x}, \end{aligned}$$

d'où

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-x} - \frac{2}{2n+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1-x} - \frac{2}{2n+1+x}$$

Or, si on fixe $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &\frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} - \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{2}{2n-x} - \frac{2}{2n+x}\right) - \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{2}{2n-1-x} - \frac{2}{2n+1+x}\right) \\ &= \frac{2}{x} - \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{2}{2n-x} - \frac{2}{2n+x}\right) - \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{2n-1-x} + \sum_{n=0}^{N} \frac{2}{2n+1+x} \\ &= \frac{2}{x} - \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{2}{2n-x} - \frac{2}{2n+x}\right) - \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{2n-1-x} + \sum_{n=1}^{N+1} \frac{2}{2n-1+x} \\ &= \frac{2}{x} - \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{2}{2n-x} - \frac{2}{2n+x}\right) - \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{2}{2n-1-x} - \frac{2}{2n-1+x}\right) + \frac{1}{2N+1+x} \\ &= \frac{2}{x} - \sum_{p=1}^{2N} \frac{1}{p-x} - \frac{1}{p+x} + \frac{1}{2N+1+x} \\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 2g(x). \end{aligned}$$

Finalement,

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g(x).$$

**4.** En déduire que $\pi \operatorname{cotan}(\pi x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
*On étudiera la différence $f : x \mapsto \pi \operatorname{cotan}(\pi x) - g(x)$, en montrant qu'elle vérifie la même équation fonctionnelle que $g$ et qu'elle est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ puis qu'elle est nulle sur $[0,1]$ en considérant son maximum et son minimum sur le segment..*

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

**Correction**

On remarque qu'en posant $h(x) = \pi \operatorname{cotan}(\pi x)$, on a $h$ et $g$ qui vérifient la même équation, donc $h - g$ aussi. L'idée est de démontrer que $h - g$ est nulle.
On remarque qu'en fait, la série de fonctions converge normalement au voisinage de 0 (il n'y a pas de $n = 0$ dans la somme !), donc par théorème de double limite, $g(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} + o(1)$. De même,

$$h(x) \underset{x\to 0}{=} \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \underset{x\to 0}{=} \pi \frac{1 + o(1)}{\pi x + o(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} + o(1),$$

d'où $g(x) - h(x) \underset{x\to 0}{=} o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc $g - h$ est prolongeable par continuité en 0, et donc en 1 par 1-périodicité.
Sur le segment $[0, 1]$, $f$ est continue donc, par le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et atteint ses bornes. On note $M$ son maximum et $x_M$ le point en lequel elle l'atteint. Par l'équation fonctionnelle,

$$2f(x_M) = f\left(\frac{x_M}{2}\right) + f\left(\frac{x_M + 1}{2}\right) \leqslant f(x_M) + f(x_M),$$

donc il y a égalité dans l'inégalité, c'est-à-dire que

$$f(x_M) = f\left(\frac{x_M}{2}\right),$$

donc, en répétant ce processus, pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$,

$$f(x_M) = f\left(\frac{x_M}{2^k}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f(0) = 0 \text{ par continuité},$$

donc $f(x_M) = 0$. De même, on montre que le minimum de $f$ est nul. Donc $f$ est nulle sur $[0, 1]$ donc sur $\mathbb{R}$ par 1-périodicité.
Finalement, on en conclut que $\pi \operatorname{cotan}(\pi x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.