TD 07
Suites et séries de fonctions

1 Suites de fonctions

Exercice 1. *CCINP 24*. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \mapsto \sin\left(nx\mathrm{e}^{-nx^2}\right)$.

1. Montrer que cette suite de fonctions converge simplement sur $[-1, 1]$.
2. Montrer que, pour tout $a \in]0, 1[$, la convergence est uniforme sur $[a, 1]$.
3. La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$?

Exercice 2. *CCINP 24*. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geqslant 0$, $\dfrac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on précisera.
2. Démontrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier la convergence de (f_n').

Exercice 3. *CCINP 24*. On considère une suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par : $u_0(x) = 1$ et $u_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x u_n\left(t - t^3\right) \mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, 1]$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
3. En déduire que la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.
4. Établir la convergence de (u_n) vers une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$, non nulle et vérifiant : $f'(x) = f\left(x - x^3\right)$.

Exercice 4. *Mines-Telecom 24*. **1.** Soit (g_n) une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbf{N} g_n$ est bornée et (g_n) converge uniformément vers une fonction g. Montrer que g est bornée.

2. On considère f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \begin{cases} nx^2 & \text{si } |x| < \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > \dfrac{1}{n} \end{cases}$ Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f. (f_n) converge-t-elle uniformément ?

Exercice 5. *Mines-Ponts 23*. On définit la suite de fonctions (p_n) par $p_0 : x \in [0, 1] \mapsto 0$ et $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \dfrac{1}{2}\left(x - (p_n(x))^2\right)$

1. Montrer que $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, p_n(x) \leqslant p_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x}$.
2. En déduire la convergence simple de la suite (p_n) et trouver sa limite.
3. Montrer que la suite converge uniformément sur $[0, 1]$.

   Indication. On montrera que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $0 \leqslant \sqrt{x} - p_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$.

Exercice 6. *CVS + Lipschitzienne = CVU*. Soit $(f_n)_{n \in N}$ une suite de fonctions K-lipschitziennes sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement vers une fonction f sur $[0, 1]$.

1. Montrer que f est K-lipschitzienne sur $[0, 1]$.
2. (*) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

2 Séries de fonctions

Exercice 7. *CCINP 24*. Soit $S(x) = \sum_{n \geqslant 2} \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

1. Déterminer le domaine D de convergence cette série de fonctions.
2. Y a-t-il convergence normale sur D ?
3. Montrer que : $\forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}$.
4. Montrer que S est continue sur D. Est-elle intégrable ?

Exercice 8. *Mines-Telecom 24*. Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(nx)}{n^2}$. Montrer que f est définie et de continue sur $\mathbb{R}$. Étudier sa dérivabilité sur $\mathbb{R}$.
Pour la dérivabilité en 0*, on pourra essayer de minorer, au voisinage de* 0*,* $\sum_{n=1}^{N} u_n'(x)$ *par* $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

Exercice 9. *Mines-Télécom 24*.

1. Justifier la convergence de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$ pour tout $x > 0$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que : $\forall x > 0$, $\left| f(x) - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right| \leqslant \frac{K}{x^2}$. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, en admettant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
4. (* Question + difficile, rajoutée par mes soins)
   (a) Calculer, pour $A > 1$, $\int_1^A \frac{1}{t(1+tx)} dt$ et déterminer la valeur de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)}$.
   (b) En justifiant que, pour x fixé, $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t + t^2 x} \leqslant \frac{1}{n + n^2 x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t + t^2 x}$, déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 10. *Mines-Ponts 24*.

1. Montrer que $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ converge simplement pour tout $x > 0$.
2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $]0, +\infty[$. Qu'en déduit-on quand x tend vers $+\infty$?
3. Montrer qu'il y a en fait convergence uniforme sur tout segment ne contenant pas d'entier négatif ou nul.
4. Montrer que S est dérivable en tout point de convergence.

Exercice 11. *Un peu de complexes*. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, calculer $\mathrm{I}_k = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \mathrm{d}\theta$.

Exercice 12. On pose

$$\forall x > -1 \quad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right]$$

1. Montrer que S est définie, continue sur $\mathrm{I} =]-1, +\infty[$.

2. Calculer $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x)$ pour $x \in \mathrm{I}$.

3. Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to -1$.

Exercice 13. *Navale 2024*. On pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n^{x+1}}$ et $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

1. Déterminer D, ensemble de définition de f.

2. Sur quel intervalle f est-elle continue ?

Exercice 14. *Centrale PC 2024*. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Établir une relation entre $F(x+1)$ et $F(x)$.

3. Donner un équivalent de F en 0 et en $+\infty$.

Exercice 15. *X PC 2023*. On pose $g : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$.

1. Montrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

2. Montrer que g est 1-périodique.

3. Établir une relation entre $g\left(\dfrac{x}{2}\right) + g\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ et $g(x)$ dès que les termes font sens.

4. En déduire que $\pi \operatorname{cotan}(\pi x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.
On étudiera la différence $f : x \mapsto \pi \operatorname{cotan}(\pi x) - g(x)$*, en montrant qu'elle vérifie la même équation fonctionnelle que g et qu'elle est prolongeable par continuité sur* $[0, 1]$ *puis qu'elle est nulle sur* $[0, 1]$ *en considérant son maximum et son minimum sur le segment..*