TD06 - Probabilité

exercice 4

1. Soit $\omega \in \Omega$, $\omega \in A \iff \forall k \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant k, \omega \in A_n$

A signifie qu'une infinité de A_n sont réalisés

2. Soit $k \in \mathbb{N}$,
On note $B_k = \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$, alors, $\forall k \in \mathbb{N}$, $B_{k+1} \subset B_k$

$\rightarrow$ la suite B_k est décroissante pour l'inclusion

donc $\mathbb{P}(B_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \mathbb{P}(A)$

la stg $\mathbb{P}(A_n)$ converge et $0 \leqslant \mathbb{P}(B_k) \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

(reste d'une serie cv)

donc par encadrement $\mathbb{P}(B_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

donc $\boxed{\mathbb{P}(A) = 0}$

3. On suppose les A_n mutuellement independants et la stg $\mathbb{P}(A_n)$ diverge.

On considère $\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \overline{B_k}\right)$ or $\overline{B_k} \subset \overline{B_{k+1}}$

donc par continuité croissante,
$P(\overline{A}) = \lim_{k \to +\infty} P(\overline{B_k})$

or $P(\overline{B_k}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{N} \overline{A_n}\right)$ par continuité decroissante

fixons $k, N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant k$,

par independance mutuelle des A_n,
$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{N} \overline{A_n}\right) = \prod_{n=k}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = \prod_{n=k}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_n))$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - x \leqslant e^{-x}$ par convexité

donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{N} \overline{A_n}\right) \leqslant \prod_{n=k}^{N} e^{-\mathbb{P}(A_n)} = e^{-\sum_{n=k}^{N} \mathbb{P}(A_n)} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

car la stg $\mathbb{P}(A_n)$ dv

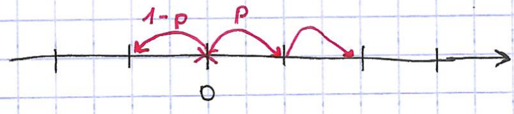
Alors, par encadrement, $\mathbb{P}(\overline{B_k}) = 0$
$\mathbb{P}(\overline{A}) = 0$

d'où $\mathbb{P}(A) = 1$ presque sûrement

4. (X_k) suite de v.a.i.i.d.

$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p \qquad \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1-p$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$



On note $A_n = \{S_n = 0\}$

On cherche $\mathbb{P}(A)$ où $A = \bigcap_{k \geq 0} \left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n \right)$

(passer infiniment souvent par 0)

$\mathbb{P}(A_n)$?

Idée : se ramener à des Bernoulli

Si $\boxed{Y_k = \dfrac{1+X_k}{2}}$ alors $Y_k \sim \mathcal{B}(p)$

(si $X_k(\omega) = -1$, $Y_k(\omega) = 0$
si $X_k(\omega) = 1$, $Y_k(\omega) = 1$)

Alors, $T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \mathcal{B}(n, p)$

Mais $T_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1+X_i}{2}$

$= \dfrac{1}{2}\left(n + \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$= \dfrac{1}{2}(n + S_n)$

donc $S_n = 2T_n - n$

Comme $T_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$,

on a $S_n(\Omega) = \underbrace{\{-n, -n+2, +n+4, \dots, n\}}_{n \text{ valeurs possibles}}$

et si $k \in [\![0, n]\!]$,

$\mathbb{P}(S_n = 2k - n) = \mathbb{P}(T_n = k)$

$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

De là, on en déduit que

S_n prend la valeur 0 ssi

$\exists k \in [\![0, n]\!], \ 2k - n = 0$, ie

ssi n est pair

$\mathbb{P}(S_n = 0) = 0$ si n est impair

si $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{P}(S_{2m} = 0) = \mathbb{P}(2T_{2m} - 2m = 0)$$
$$= \mathbb{P}(T_{2m} = m)$$
$$= \binom{2m}{m} p^m (1-p)^m$$

Nature de la stg $\mathbb{P}(S_{2m}=0)$?

D'Alembert avec $u_m = \mathbb{P}(S_{2m} = 0)$

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{\frac{(2m+2)!}{(m+1)!^2} p^{m+1} (1-p)^{m+1}}{\frac{(2m)!}{(m!)^2} p^m (1-p)^m}$$

$$= \frac{(2m+2)(2m+1)\, p(1-p)}{(m+1)^2}$$

$$\xrightarrow[m \to +\infty]{} 4p(1-p) < 1 \text{ dès que } p \neq \frac{1}{2}$$

donc $\sum u_m$ converge

donc $\sum \mathbb{P}(S_{2m} = 0)$ cv

donc comme $\mathbb{P}(S_n = 0)$ si n est pair,

$$\sum \mathbb{P}(S_n = 0) \text{ cv}$$

Par la question 2, $\mathbb{P}(A) = 0$

Si $p \neq \frac{1}{2}$, on ne passe presque sûrement qu'un nombre <u>fini</u> de fois par 0