PSI – Programme de colles
Semaine 08 – du 25 au 29 novembre 2024

Programme en bref

- Questions de cours de probabilités et de suites/séries de fonctions (le début uniquement, cf. exemples de questions de cours).
- Exercices de probabilités uniquement.

Exemples de questions de cours ou d'exercices très classiques

1. Espérance d'une des lois usuelles (binomiale, géométrique, Poisson).
2. Positivité de l'espérance ; variable positive d'espérance nulle.
3. Formule $\mathbb{E}(X) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$.
4. Inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espérance.
5. Variance d'une des lois usuelles (binomiale, géométrique, Poisson).
6. Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebycheff.
7. Loi faible des grands nombres.
8. Définition de la convergence simple/de la convergence uniforme d'une suite de fonctions + la convergence uniforme implique la convergence simple.
9. Définition de la convergence simple/uniforme/normale d'une série de fonctions + la convergence normale de $\sum u_n$ implique la convergence absolue de $\sum u_n(x)$ pour tout x ainsi que la convergence uniforme de $\sum u_n$.
10. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues.

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Variables aléatoires discrètes

B - Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Univers, événements, variables aléatoires discrètes	
Univers Ω, tribu $\mathscr{A}$. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.	On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables. Traduction de la réalisation des événements $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω, telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement.	L'univers Ω n'est en général pas explicité. Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$. Notation $(X \geqslant x)$ (et analogues) lorsque X est à valeurs réelles.

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Probabilité	
Probabilité sur $(\Omega,\mathscr{A})$, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$. Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance de la probabilité.	Notation $P(A)$.
Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
Sous-additivité : $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.	En cas de divergence de la série à termes positifs $\sum P(A_n)$, on rappelle que $$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty.$$
Événement presque sûr, événement négligeable.	Système quasi-complet d'événements.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B)>0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\vert B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. L'application P_B définit une probabilité. Formule des probabilités composées.	
Formule des probabilités totales.	Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors $$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\vert A_n)P(A_n)$$ On rappelle la convention $P(B\vert A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n)=0$.
Formule de Bayes.	
d) Loi d'une variable aléatoire discrète	
Loi P_X d'une variable aléatoire discrète.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$. On note $X \sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi, sans soulever de difficulté sur cette notation.
Variable aléatoire $f(X)$. Si $X\sim Y$ alors $f(X)\sim f(Y)$.	On ne soulève aucune difficulté sur le fait que $f(X)$ est une variable aléatoire.
Variable géométrique de paramètre $p\in\,]0,1[$: $$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X\sim\mathscr{G}(p)$. Relation $P(X>k) = (1-p)^k$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Variable de Poisson de paramètre $\lambda>0$: $$\forall k\in\mathbb{N},\ P(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$	Notation $X\sim\mathscr{P}(\lambda)$. Interprétation en termes d'événements rares.
Couple de variables aléatoires discrètes.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X=x, Y=y)$.
Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle de Y sachant un événement A.	Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

Contenus	Capacités & Commentaires
e) Événements indépendants	
Indépendance de deux événements.	Si $P(B)>0$, l'indépendance de A et B équivaut à $$P(A\|B)=P(A).$$
Indépendance d'une famille finie d'événements.	L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.
f) Variables aléatoires indépendantes	
Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A\subset X(\Omega)$ et $B\subset Y(\Omega)$, les événements $(X\in A)$ et $(Y\in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X,Y) est donnée par $$P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y).$$ Extension au cas de n variables aléatoires.
Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.	On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une suite i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.
Fonctions de variables indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.	Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1,\dots,X_m)$ et $g(X_{m+1},\dots,X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.

C - Espérance et variance

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe	
Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0,+\infty]$, définie par $$\mathrm{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x).$$	On adopte la convention $xP(X=x)=0$ lorsque $x=+\infty$ et $P(X=+\infty)=0$.
Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X.	X est d'espérance finie si la famille $\big(xP(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X. Variable centrée.
Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, relation : $$\mathrm{E}(X)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(X\geqslant n).$$	
Espérance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Formule de transfert : $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas : $$\mathrm{E}\big(f(X)\big)=\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x).$$	On remarque que la formule s'applique aux couples, aux n-uplets de variables aléatoires.
Linéarité de l'espérance. Si $\|X\|\leqslant Y$ et $\mathrm{E}(Y)<+\infty$, alors X est d'espérance finie. Positivité, croissance de l'espérance.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X = 0)$ est presque sûr.	
Pour X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et : $$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	Extension au cas de n variables aléatoires.

b) Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type et covariance

Si X^2 est d'espérance finie, X est d'espérance finie. Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi et : $$\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$$	Cas d'égalité.
Variance, écart type.	Notations $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$. Variable réduite.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Covariance de deux variables aléatoires. Relation $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes. Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.	

d) Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$, pour tout $\varepsilon > 0$: $$P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n} - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$	Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $$P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n} - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$. Les étudiants doivent savoir retrouver, avec $\sigma = \sigma(X_1)$: $$P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n} - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Suites et séries de fonctions – COURS SEULEMENT !

Cette section a pour objectif de définir différents modes de convergence d'une suite, d'une série de fonctions et d'étudier le transfert à la limite, à la somme des propriétés des fonctions.
Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions	
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale entraîne la convergence uniforme.	Utilisation d'une majoration uniforme de $\lvert f_n(x)\rvert$ pour établir la convergence normale de $\sum f_n$. La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.
b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions	
Continuité de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément vers f sur I, alors f est continue sur I.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
c) Régularité de la somme d'une série de fonctions	
Continuité de la somme d'une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur I converge uniformément sur I, alors sa somme est continue sur I.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.