 nlaillet.math@gmail.com

Semaine 08 – Colle du lundi 25/11 à 8h

Nom	Énoncé et commentaires	Note
	Colle Python. Soit N un entier naturel non nul. On dispose d'un sac contenant N jetons numérotés de 1 à N dans lequel on peut effectuer une succession de tirages, avec remise, d'un jeton en notant à chaque fois le numéro obtenu. On note, pour tout entier naturel n non nul et chaque succession ω de n tirages, $T_{N,n}(\omega)$ le nombre (aléatoire) de numéros distincts obtenus au cours de ces n tirages. **1. [Py]** Écrire une fonction `tirage(N,n)` qui simule la variable aléatoire $T_{N,n}$. **2. [Py]** Énoncer la loi faible des grands nombres. En déduire une fonction `esp(N,n)` qui fournit une valeur approchée de son espérance $E\left(T_{N,n}\right)$. Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de `esp(N,n)` pour $N = 2, 3, 4, 5, 10$. Que conjecturer quant à la limite quand n tend vers $+\infty$ de $E\left(T_{N,n}\right)$? On note ℓ_N cette dernière. **3. [Py]** En calculant, pour plusieurs valeurs de n et de N, le rapport (obtenu numériquement) $\dfrac{E\left(T_{N,n+1}\right)-\ell_N}{E\left(T_{N,n}\right)-\ell_N}$, conjecturer une formule donnant $E\left(T_{N,n}\right)$ pour tout couple $(N,n) \in \mathbb{N}^{\star 2}$. Dans la suite, pour plus de légèreté, on fixe $N \in \mathbb{N}^\star$, on note plus simplement T_n au lieu de $T_{N,n}$. **4.** Montrer vos conjectures : (a) en exprimant T_n comme une somme de variables de Bernoulli bien choisies, (b) en déterminant, pour $k \in [\![1, N]\!]$, la loi de T_{n+1} sachant $(T_n = k)$. **5.** Déterminer, pour tout entier $k \in [\![1, N]\!]$, la limite de la suite de terme général $P\left(T_n = k\right)$. **6.** L'entier N étant toujours fixé, on effectue maintenant des tirages sans remise dans ce même sac tant que la suite des numéros tirés est croissante, i.e. jusqu'à obtention d'un numéro plus petit que le précédent. On note X la variable aléatoire correspondant à la longueur de la suite croissante de numéros obtenue. Déterminer $E(X)$.	
	1. Cours. Inégalité de Cauchy-Schwarz. **2.** Soit n dans $\mathbb{N}^*$, $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une suite de vaiid centrées. Pour k dans $[\![1, n]\!]$, on pose $S_k = X_1 + \cdots + X_k$. On veut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $$\mathbb{P}\left(\sup_{1\leqslant k\leqslant n} \lvert S_k\rvert > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(S_n^2)}{\varepsilon^2}.$$ (a) Soit $\varepsilon > 0$ et, pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $$A_k(\varepsilon) = (\lvert S_1\rvert \leqslant \varepsilon, \dots \lvert S_{k-1}\rvert \leqslant \varepsilon, \lvert S_k\rvert > \varepsilon).$$ Montrer que pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $$\mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k(\varepsilon)}) \geqslant \varepsilon^2 \mathbb{P}(A_k).$$ (b) Conclure.	
	1. Cours. Markov + BT. **2.** Soit X une variable aléatoire. S'il existe, on note $\mu(n) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^n)$ son moment centré d'ordre n. On dit que X admet un Kurstosis si x admet une espérance et des moments centrés $\mu(2)$, $\mu(3)$, $\mu(4)$. Dans ce cas, on note $K(X) = -3 + \dfrac{\mu(4)}{\mu(2)^2} = -3 + \dfrac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^4)}{(\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2))^2}$ son Kurtosis. (a) Montrer que si X admet un Kurtosis, alors $aX + b$ admet aussi un Kurtosis et que $K(aX + b) = K(X)$. (b) Calculer $K(X)$ si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. (c) Montrer que pour toute variable aléatoire X, on a $K(X) \geqslant -2$. (d) Existe-t-il $M > 0$ tel que pour toute variable aléatoire X, on ait $K(X) \leqslant M$?	