Chapitre 08
Réduction des endomorphismes et des matrices

1 Éléments propres d'un endomorphisme

1.1 Définitions

Définition 1

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E.

1. Une **valeur propre** de u est un élément λ de $\mathbb{K}$ vérifiant : $\exists x \in E \setminus \{0_E\},\ u(x) = \lambda x$.
2. Un **vecteur propre** de u est un vecteur x **non nul** de E vérifiant : $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x$.
3. Si $x \in E \setminus \{0_E\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ satisfont $u(x) = \lambda x$, on dit que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.
4. Lorsqu'il n'est pas réduit à $\{0_E\}$, $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est appelé **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ.

Remarque 2

1. Un vecteur est propre si, et seulement si, il engendre une droite stable.
2. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire se lisent sur la diagonale.

1.2 Diagonalisation : aspects géométriques

Remarque 3

Si u et v commutent, tout sous-espace propre pour u est stable par v.

Proposition 4

Toute somme (finie) de sous-espaces propres est directe.

Dans tout ce qui suit, E est un espace de dimension finie.

Définition 5

1. Un endomorphisme de E est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.
2. Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarque 6

Application au calcul de puissances de matrices.

Proposition 7

Soit u un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- u est diagonalisable
- la somme (directe) des sous-espaces propres de u est égale à E
- la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à la dimension de E

On adapte cette proposition aux matrices.

Point de méthode 8 (Première manière de déterminer la diagonalisabilité)

Étant donné $u \in \mathscr{L}(E)$, on résout l'**équation aux valeurs propres** $u(x) = \lambda x$, d'inconnues $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E \setminus \{0\}$. On adapte aux matrices.

Proposition 9 (Petit théorème spectral – admis pour le moment)

Toute matrice **symétrique réelle** est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (i.e. à valeurs propres réelles et vecteurs propres réels).

2 Utilisation de polynômes

2.1 Polynôme caractéristique

Définition 10

1. Le polynôme caractéristique d'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est le polynôme χ_M défini par : $\forall x \in \mathbb{K}, \chi_M(x) = \det(x\mathrm{I}_n - M) = (-1)^n \det(M - x\mathrm{I}_n)$.
2. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est le polynôme χ_u défini par : $\forall x \in \mathbb{K},\ \chi_u(x) = \det(x\mathrm{Id}_E - u) = (-1)^{\dim(E)}\det(u - x\mathrm{Id}_E)$.

Remarque 11

1. $\chi_M(x) = x^n - \mathrm{tr}(M)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M)$
2. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Proposition 12

Si χ_u (resp. χ_A) est scindé à racines simples, alors u (resp A) est diagonalisable. La réciproque est (très) fausse.

Proposition 13

En dimension finie, l'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme, appelé spectre de u et noté $\mathrm{Sp}(u)$, est l'ensemble des racines du polynôme caractéristique. Si λ est une valeur propre, si m est sa multiplicité dans χ_u, si $E_\lambda(u)$ est le sous-espace propre correspondant, alors

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(u)) \leqslant m.$$

On adapte cette proposition aux matrices.

nlaillet.math@gmail.com

Proposition 14

u est diagonalisable si, et seulement si, χ_u est scindé et la multiplicité de chaque valeur propre de u est égale à la dimension de l'espace propre correspondant.
On adapte cette proposition aux matrices.

Point de méthode 15 (Deuxième manière de diagonaliser)

On calcule le polynôme caractéristique d'une matrice A, on trouve ses racines $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ et on résout, pour tout i, $AX = \lambda_i X$, en vérifiant que la dimension de l'ensemble des solutions est égal à la multiplicité de λ_i dans χ_A.

2.2 Polynômes annulateurs

Proposition 16

Si u est annulé par un polynôme P, toute valeur propre de u est racine de P.
On adapte cette proposition aux matrices.

Proposition 17

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On a l'équivalence entre les trois propositions suivantes

1. u diagonalisable
2. $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$
3. u est annulé par un polynôme scindé à racines simples.

La même proposition fonctionne pour les matrices.

Corollaire 18

L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est diagonalisable.

Théorème 19 (Cayley-Hamilton)

Pour tout u dans $\mathscr{L}(E)$, $\chi_u(u) = 0$; pour toute M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_M(M) = 0_n$.

Point de méthode 20 (Troisième méthode pour déterminer la diagonalisabilité)

On a un endomorphisme φ (resp. une matrice A) on calcule φ^2, φ^3 et on essaie de trouver un polynôme scindé à racines simples annulant φ.

 nlaillet.math@gmail.com

3 Endomorphismes trigonalisables

Définition 21

1. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de u dans $\mathscr{B}$ soit triangulaire supérieure.
2. Une matrice M est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Proposition 22

1. Un endomorphisme (ou une matrice) sur un $\mathbb{K}$-ev E est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.
2. En particulier, tout endomorphisme sur un $\mathbb{C}$-ev/toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Proposition 23

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec multiplicité. Alors

$$\det(M) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ et } \mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$