DM 08 – E3A PC 2012 – À rendre entre le mardi 26/11 le vendredi 29/11

Formules. Précisez la formule choisie en début de sujet

- **Formule 1.** Questions 1 à 9. Temps conseillé : 2h.
- **Formule 2.** Tout le problème. Temps conseillé : 3h.

Remarques :

- Question 1, à remplacer pour les 3/2 par « donner la série de l'exponentielle. »
- La question 12.3 est réservée aux 5/2.

***

On note $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$f_0 \in E \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \, f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$$

Pour tout réel $a > 0$, on note $I_a = [-a, a]$.

1. Donner l'expression du développement en série entière de la fonction exponentielle et préciser son domaine de validité.

2. Soient g un élément de E et β un réel.

2.1 Démontrer que l'application $G : x \longmapsto G(x) = e^x \displaystyle\int_\beta^x g(t)\, e^{-t}\, dt$ est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathscr{E}) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \; y'(x) - y(x) = g(x)$$

2.2 Calculer $G(\beta)$.

2.3 Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E})$.

2.4 Énoncer un problème de Cauchy, lié à l'équation $(\mathscr{E})$, dont G est l'unique solution.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Résoudre l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda\, y''(x) - (1+\lambda)\, y'(x) = 0$$

4. Démontrer qu'il existe une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall x \in I_a, \; \forall k \in \mathbb{N}, \; |f_k(x)| \leqslant M \, \frac{|x|^k}{k!}$$

5. Démontrer alors que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction F.

6. Démontrer que F est de classe C^1 sur I_a, puis sur $\mathbb{R}$.

7. Calculer $F(0)$.

8. Prouver que F est solution d'un problème de Cauchy associé à une équation différentielle linéaire du premier ordre.

9. Donner alors une expression de F en fonction de f_0.

 nlaillet.math@gmail.com

10. Dans cette question, on prend $f_0 : x \in \mathbb{R} \longmapsto f_0(x) = x^2$. Déterminer précisément F.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$.

11.1 Prouver qu'il existe des scalaires $(a_0, ..., a_n)$, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f_{n+1}^{(n+1)}(t)\, dt$$

11.2 Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f_0(t)\, dt$$

11.3 En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \int_0^x f_0(t) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} \right) dt$$

11.4 Retrouver alors l'expression de F obtenue à la question 9.

12. Soit $\psi : f \in E \longmapsto H = \psi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad H(x) = e^x \int_0^x f(t)\, e^{-t}\, dt$$

12.1 Vérifier que ψ est un endomorphisme de E.

12.2 ψ est-elle injective ?

12.3 Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ψ.