Semaine 09 – Colle du lundi 02/12 à 8h

Nom	Énoncé et commentaires	Note
	Python. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n l'application $x \mapsto \dfrac{1}{(n+x)\sqrt{n+x}+\sqrt{n+x}}$ et on note U la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ lorsqu'elle est définie. **1.** Montrer que U est définie sur $]-1,+\infty[$. **2.** **[Py]** A l'aide de Python, représenter les sommes partielles de rang 1 à 10 de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ sur l'intervalle $]-1,1]$. **3.** Montrer que U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$. **4.** Montrer que $\mathrm{U}(x) \underset{x\to-1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$. **5.** Justifier que U est intégrable sur $]-1,0]$ et calculer $\int_{-1}^{0} U(x)dx$. **6.** Déterminer un équivalent simple de U au voisinage de $+\infty$.	
	1. **Cours.** CVN/CVU/CVS **2.** Démontrer qu'il existe une unique fonction continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout x, $f(x)+f(1+x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.	
	1. **Cours.** Théorème d'intégration d'une limite de fonctions. **2.** Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$. (a) Étudier la convergence de (f_n), puis la limite de $\int_0^1 f_n(x)dx$. (b) Déterminer le domaine de définition de $S(x)=\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$. (c) Trouver une relation entre $S(x)$ et $S(1/x)$ pour $x \in]0,1]$. (d) Étudier la continuité de S sur son domaine de définition. (e) Déterminer la limite de $S(x)$ quand x tend vers l'infini.	