

TD 15 Analyse asymptotique

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Effectuer le dl...

1. à l'ordre 3 en 0 de $\text{th}(x)$.

Correction

$$\text{th}(x) = x - \frac{x^3}{3}$$

2. à l'ordre 3 en 0 de
 $\sin(x) + \text{sh}(x) - \tan(x) - \text{th}(x)$.

Correction

$$o(x^5)$$

3. à l'ordre 3 en 0 de
 $(e^x + \sin(x))(1 - \ln(1 + x))$.

Correction

$$1 + x - x^2 + o(x^2).$$

4. à l'ordre 3 en 1 de $e^x + \ln(x)$.

Correction

$$e + (1 + e)(x - 1) + \frac{1}{2}(e - 1)(x - 1)^2 + \frac{1}{6}(2 + e)(x - 1)^3$$

5. à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{4}$ de $\cos(x) - \sin(x)$.

Correction

$$-\sqrt{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right).$$

6. à l'ordre 100 en 0 de $\ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Correction

Question piège (et un 20 en DS à quelqu'un qui fait effectivement le dl à l'ordre 99).

Remarquons que $e^x = \sum_{k=0}^{100} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})$, donc

$$\sum_{k=0}^{100} \frac{x^k}{k!} = e^x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100}),$$

donc

$$\begin{aligned} \ln \left(\sum_{k=0}^{100} \frac{x^k}{k!} \right) &= \ln \left(e^x \left(1 - e^{-x} \frac{x^{100}}{100!} + o(e^{-x} x^{100}) \right) \right) \\ &= 1 + \ln \left(1 - e^{-x} \frac{x^{100}}{100!} + o(e^{-x} x^{100}) \right) \\ &= 1 - e^{-x} \frac{x^{100}}{100!} + o \left(-e^{-x} \frac{x^{100}}{100!} \right). \end{aligned}$$

Or, $-e^{-x} \frac{x^{100}}{100!} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^{100}}{100!}$, donc $o \left(-e^{-x} \frac{x^{100}}{100!} \right) = o(x^{100})$. De même, $e^{-x} \frac{x^{100}}{100!} = \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})$. Donc

$$\ln \left(\sum_{k=0}^{100} \frac{x^k}{k!} \right) = 1 - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})$$

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)}$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3} \right)^n$

Exercice 3. Déterminer la limite ℓ , quand n tend vers $+\infty$, de

$$u_n = \left(2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \right)^{n^2},$$

ainsi qu'un équivalent simple de $u_n - \ell$.

Correction

On écrit que

$$\begin{aligned} u_n &= \left(2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \right)^{n^2} \\ &= \exp \left[n^2 \ln \left(2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \right) \right] \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp \left[n^2 \ln \left(2 \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{16n^3} \right) - \left(1 + \frac{2}{2n} - \frac{1}{8} \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{2}{n} \right)^3 \right) + o \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \right] \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp \left[n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{4n^2} - \frac{3}{8n^3} + o \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \right] \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp \left[n^2 \left(\frac{1}{4n^2} - \frac{3}{8n^3} + o \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \right] \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \right] \\ &= e^{\frac{1}{4}} - \frac{3e^{\frac{1}{4}}}{8n} + o \left(\frac{1}{n} \right), \end{aligned}$$

donc la limite ℓ est $e^{\frac{1}{4}}$ et un équivalent de $u_n - \ell$ est $-\frac{3e^{\frac{1}{4}}}{8n}$

Exercice 4. Études locales.

- Étudier le prolongement par continuité et la dérivabilité (et, le cas échéant, la position relative de la courbe et de la tangente) de la fonction $f : x \mapsto \frac{e^{1+\sin(x)} - e}{\tan(x)}$, au point d'abscisse 0.

Correction

Déterminons un dl en 0 de $\frac{e^{1+\sin(x)} - e}{\tan(x)} = e \frac{e^{\sin(x)} - 1}{\tan(x)}$. Déjà,

$$e^{\sin(x)} - 1 = e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} - 1 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

De plus, $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc

$$\frac{e^{\sin(x)} - 1}{\tan(x)} = \frac{x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{1 + \frac{x}{2} + o(x^2)}{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = \left(1 + \frac{x}{2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) + o(x^2) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

L'équation de la tangente est donc $y = e + \frac{ey}{2}$, et la courbe est localement sous sa tangente.

- Étudier, au voisinage de 0, $g : x \mapsto \frac{x^x - 1}{1 - x + \ln x}$.
- Étudier, au voisinage de $+\infty$, la fonction $h : x \mapsto \frac{x \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch} x - 1}$.

Exercice 5. Étude d'une bijection réciproque. Soit $f(x) = x + \ln x$ pour $x > 0$.

- Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} . On note $g = f^{-1}$.
- Montrer que g est de classe \mathcal{C}^∞ .
- Trouver le développement limité de g en 1 à l'ordre 2.
- Donner un développement asymptotique de g en $+\infty$ à trois termes (on pourra remarquer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g(y) + \ln(g(y)) = y$).

Correction

Comme indiqué par l'énoncé, on remarque en effet que pour tout y dans \mathbb{R} , $f(g(y)) = y$, i.e.

$$g(y) + \ln(g(y)) = y.$$

Mais, comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$, donc, en particulier, $\ln(g(y)) \underset{y \rightarrow +\infty}{=} o(g(y))$. Donc $g(y) + \ln(g(y)) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} g(y)$, donc $g(y) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} y$. On a donc

$$g(y) - y = -\ln(g(y)) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(y),$$

par le passage des équivalents au \ln qu'il faut toujours justifier. Mais donc, on a $g(y) =$

$y - \ln(y) + o(\ln(y))$, donc

$$g(y) = y - \ln(g(y))$$

$$\underset{y \rightarrow +\infty}{=} y - \ln(y - \ln(y) + o(\ln(y)))$$

$$\underset{y \rightarrow +\infty}{=} y - \ln(y) - \ln\left(1 - \frac{\ln(y)}{y} + o\left(\frac{\ln(y)}{y}\right)\right) \quad (\text{en factorisant par ce qui est gros!})$$

$$\underset{y \rightarrow +\infty}{=} y - \ln(y) + \frac{\ln(y)}{y} + o\left(\frac{\ln(y)}{y}\right)$$

Exercice 6. 1. Montrer que pour tout n dans \mathbb{N}^* , l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution, que l'on notera u_n .

2. Démontrer que u_n possède une limite que l'on déterminera.

3. Montrer que $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

2 Exercices faits en TD

Exercice 7. ●○○ Effectuer le développement limité...

1. à l'ordre 3 en 0 de $\frac{1}{1-x} - e^x$.

2. à l'ordre 5 en 0 de $\sin(x) \cos(2x)$.

3. à l'ordre 3 en 0 de $(x^3 + 1)\sqrt{1-x}$.

4. à l'ordre 4 en 0 de $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$.

5. à l'ordre 4 en 0 de $\cos(x) \ln(1+x)$.

6. à l'ordre 4 en 0 de $(\ln(1+x))^2$.

7. à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $\sin(x)$.

8. à l'ordre 3 en 0 de $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$.

9. à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1 + \sin x)$.

10. à l'ordre 3 en 1 de $\cos(\ln(x))$.

11. à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1 + e^x)$.

12. à l'ordre 3 en 0 de $\ln(2 + \sin x)$.

13. à l'ordre 3 en 0 de $e^{\sqrt{1+x}}$.

14. à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1 + \sqrt{1+x})$.

15. à l'ordre 3 en 0 de $\ln(3e^x + e^{-x})$.

16. à l'ordre 2 en 0 de $(1+x)^{1/x}$.

17. à l'ordre 4 en 0 de $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

18. à l'ordre 3 en 0 de $\frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$.

19. à l'ordre 2 en 0 de $\frac{\text{Arctan} x}{\tan x}$.

20. à l'ordre 2 en 1 de $\frac{x-1}{\ln x}$.

21. à l'ordre 6 en 0 de $(\cos(x))^{\sin(x)}$.
 22. à l'ordre 4 en 1 de $\frac{\ln(x)}{x^2}$.
 23. à l'ordre 4 en 0 de $\ln\left(\frac{\text{th}(x)}{x}\right)$.
 24. à l'ordre 100 en 0 de $\ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Correction

Je ne détaillerai pas les calculs de chaque dl, mais indiquerai les réponses en précisant, si besoin est, la grosse difficulté.

1. somme classique de dl : $\frac{1}{1-x} - e^x = \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3)$.
2. produit classique de dl : $\sin(x) \cos(2x) = x - \frac{13}{6}x^3 + \frac{121}{120}x^5 + o(x^5)$.
3. produit classique de dl, en remarquant que le premier terme est déjà un dl : $(x^3 + 1)\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15}{16}x^3 + o(x^3)$
4. somme classique de dl : $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{5}{64}x^4 + o(x^4)$.
5. produit classique de dl :
 $\cos(x) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.
6. produit classique de dl : $(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12} + o(x^4)$.
7. **attention, dl pas en 0!** On pose $u = x - \frac{\pi}{3}$. Alors $\sin\left(u + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{u}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{u^3}{12} + o(u^3)$, donc

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right).$$

Attention on ne développe pas les puissances

8. somme classique de dl si on pense à séparer le ln. Attention juste à une (mini) composition avec le x^2 .
 $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.
9. composition standard de dl : $\ln(1 + \sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
10. composition + dl pas en 0 : à l'ordre 3 en 1 de $\cos(\ln(x)) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.
11. attention, ce qu'il y a à l'intérieur du ln ne tend pas vers 0! Il faut écrire $\ln(1 + e^x) = \ln\left(2\frac{1+e^x}{2}\right) = \ln(2) + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$, et ensuite faire un changement de variables.
 $\ln(1 + e^x) = \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^3)$.
12. attention, ce qu'il y a à l'intérieur ne tend pas vers 1!
 $\ln(2 + \sin x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{24} + o(x^3)$.

13. composition de fonctions : $e^{\sqrt{1+x}} = e + \frac{ex}{2} + \frac{ex^3}{48} + o(x^3)$.

14. composition, mais attention à la limite à l'intérieur du ln !

$$\ln(1 + \sqrt{1+x}) = \ln(2) + \frac{x}{4} - \frac{3x^2}{32} + o(x^2).$$

15. encore une fois, il faut **avant tout** repérer la limite à l'intérieur du ln. Ici on se rend compte que cette limite est égale à 4, donc on va nécessairement tout factoriser par 4, et on trouvera du $\ln(4)$ à l'ordre 0.

$$\ln(3e^x + e^{-x}) = \ln(4) + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{8} + o(x^3).$$

16. on a une puissance, on utilise **obligatoirement** l'exponentielle, et on trouve : $(1+x)^{1/x} = e - \frac{ex}{2} + \frac{11ex^2}{24} + o(x^2)$

17. attention, pour le quotient à l'intérieur, il faut remarquer que le numérateur et le dénominateur sont tous deux équivalents à x : ces x vont se simplifier dans les dl, mais il faudra par conséquent pousser le dl à un ordre de plus :

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4).$$

18. quotient avec simplifications. $\frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} = 1 - x + \frac{2x^2}{3} - \frac{11x^3}{24} + o(x^3)$.

19. on détermine le dl de Arctan par primitivation, puis on effectue le quotient : $\frac{\text{Arctan}x}{\tan x} = 1 - \frac{2x^2}{3} + o(x^2)$.

20. quotient avec simplifications + on n'est pas en 0 ! : $\frac{x-1}{\ln x} = 1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{12} + o((x-1)^2)$.

21. On repasse par la forme exponentielle : $\cos(x)^{\sin(x)} = e^{\sin(x)\ln(\cos(x))}$. Or, $\sin(x) \sim x$ donc il suffit de développer $\ln(\cos(x))$ à l'ordre 5. De même, $\ln(\cos(x))\sin(x) \sim -\frac{x^2}{2}$ donc il suffit de développer $\sin(x)$ à l'ordre 4. On a, en posant $u = \cos(x) - 1$, $\ln(\cos(x)) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Or, $u = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ donc

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^5) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5),$$

donc

$$\begin{aligned} \sin(x)\ln(\cos(x)) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)\right) \\ &= -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{12} + o(x^6) = -\frac{x^3}{2} + o(x^6) \end{aligned}$$

Donc, en posant $u = \sin(x)\ln(\cos(x))$, $u \sim -\frac{x^3}{2}$ donc il suffit de développer e^u à l'ordre 2 en u : $e^u = u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ donc $e^{\sin(x)\ln(\cos(x))} = 1 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^6}{8} + o(x^6)$, d'où le résultat voulu !

22. On pose $u = x - 1$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x)}{x^2} &= \frac{\ln(1+u)}{(1+u)^2} \\ &= \left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4) \right) \underbrace{\left(1 - 2u + 3u^2 - 4u^3 + o(u^3) \right)}_{\text{ordre 3 car le terme de gauche est } \sim u} \\ &= u - 2u^2 + 3u^3 - 4u^4 - \frac{u^2}{2} + u^3 - \frac{3}{2}u^4 + \frac{u^3}{3} - \frac{2}{3}u^4 - \frac{u^4}{4} + o(u^4) \\ &= u - \frac{5}{2}u^2 + \frac{13}{3}u^3 - \frac{77}{12}u^4 + o(u^4) \\ &= (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4 + o((x-1)^4) \end{aligned}$$

23. On détermine le développement limité de $\text{th}(x)$ en remarquant que $\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x)$, et en faisant comme le développement limité de \tan . On trouve $\text{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$, donc

$$\frac{\text{th}(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{15}x^4 + o(x^4).$$

Ensuite, il suffit de faire le dl de $\ln(1+u)$ à l'ordre 2 (le premier terme étant équivalent à $-x^2/3$, et on trouve (excusez-moi pour les coefficients...)

$$\ln\left(\frac{\text{th}(x)}{x}\right) = -\frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90} + o(x^4).$$

24. Question piège (et un 20 en DS à quelqu'un qui fait effectivement le dl à l'ordre 99).

Remarquons que $e^x = \sum_{k=0}^{100} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})$, donc

$$\sum_{k=0}^{100} \frac{x^k}{k!} = e^x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100}),$$

donc

$$\begin{aligned} \ln\left(\sum_{k=0}^{100} \frac{x^k}{k!}\right) &= \ln\left(e^x \left(1 - e^{-x} \frac{x^{100}}{100!} + o(e^{-x} x^{100})\right)\right) \\ &= 1 + \ln\left(1 - e^{-x} \frac{x^{100}}{100!} + o(e^{-x} x^{100})\right) \\ &= 1 - e^{-x} \frac{x^{100}}{100!} + o\left(-e^{-x} \frac{x^{100}}{100!}\right). \end{aligned}$$

Or, $-e^{-x} \frac{x^{100}}{100!} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^{100}}{100!}$, donc $o\left(-e^{-x} \frac{x^{100}}{100!}\right) = o(x^{100})$. De même, $e^{-x} \frac{x^{100}}{100!} = \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})$. Donc

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{100} \frac{x^k}{k!}\right) = 1 - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})$$

Exercice 8. ●●○ Déterminer un équivalent simple, lorsque x tend vers 0, de $\frac{2}{x} - \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\text{sh}(x)}$.
En déduire la limite, quand x tend vers 0^+ , de $\frac{2}{x} - \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\text{sh}(x)}$

Correction

Ici, il ne s'agit pas directement de développements limités. Il faut d'abord se ramener à une situation qui permet les dl. On écrit

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} - \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\text{sh}(x)} &= \frac{1}{x} \left(2 - \frac{x}{\sin(x)} - \frac{x}{\text{sh}(x)} \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(2 - \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{-1} - \left(\frac{\text{sh}(x)}{x} \right)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Or, $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$, donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{-1} &= \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right)^{-1} \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + o(x^4) \end{aligned}$$

et, de même, en faisant attention au changement de signe, $\left(\frac{\text{sh}(x)}{x} \right)^{-1} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + o(x^4)$, donc

$$\begin{aligned} 2 - \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{-1} - \left(\frac{\text{sh}(x)}{x} \right)^{-1} &= 2 - \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} \right) - \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} \right) + o(x^4) \\ &= -\frac{7}{180}x^4 + o(x^4), \end{aligned}$$

donc

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\text{sh}(x)} = -\frac{7}{180}x^3 + o(x^3),$$

de limite nulle quand x tend vers 0.

Exercice 9. ●●○ En s'intéressant d'abord au dl de $f'(x)$, déterminer la dl à l'ordre 4 en 0 de $f(x)$ où $f : x \mapsto \ln \left(\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$.

Correction

Dérivons f :

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1}{2 \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}.$$

Or, pour tout réel θ , $2 \cos(\theta) \sin(\theta) = \sin(2\theta)$, d'où

$$f'(x) = \frac{1}{\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3),$$

d'où, en intégrant,

$$\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Exercice 10. ●●○ Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos(x) - x}{\sin(x) - \ln(1+x)}$

Correction

Le numérateur tend vers 2 en 0, le dénominateur vers 0, et $\sin(x) - \ln(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos(x) - x}{\sin(x) - \ln(1+x)} = +\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1}\right)^{x^2}$

Correction

Par l'écriture exponentielle, on est ramenés à considérer

$$x^2 \ln\left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1}\right).$$

Écrivons d'abord

$$\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1} = x \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}} - x \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}}.$$

Or, $\sqrt[3]{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + o(u)$. Donc, en faisant un développement asymptotique à l'ordre $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, on obtient

$$\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}} - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 1 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

Donc

$$\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

Donc

$$\ln\left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{x},$$

donc

$$x^2 \ln\left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty.$$

En passant les limites à l'exponentielle, on en déduit que la limite recherchée est 0.

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}}$

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n$

Correction

On passe par la forme exponentielle :

$$\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)\right).$$

Or, $a^{1/n} = 1 + \frac{\ln(a)}{n} + o(1/n)$ et $b^{1/n} = 1 + \frac{\ln(b)}{n} + o(1/n)$, donc

$$\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} = 1 + \frac{\ln(ab)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

donc

$$n \ln\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right) \sim \frac{\ln(ab)}{2},$$

donc

$$\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(ab)/2} = \sqrt{ab}.$$

Exercice 11. Détermination d'équivalents. ●●○

1. Déterminer un équivalent en $\frac{\pi}{2}$ de $f(x) = \cos(\cos x) - \sin x$.

2. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1$.

Correction

On écrit que

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1 = e^{x \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)} - 1$$

Mais

$$\begin{aligned} x \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) &= x \ln\left(\frac{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right) \\ &= x \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} e^{x \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)} - 1 &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)} \end{aligned}$$

Exercice 12. ●●○ On définit $f : x \mapsto \frac{\text{Arctan } x}{x}$ pour tout réel x non nul.

1. Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et préciser la valeur à choisir pour $f(0)$.

Correction

On sait que $\frac{\text{Arctan}(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$, donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0, avec la valeur 1 en 0.

2. Montrer que f , ainsi prolongée, est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Correction

Il s'agit d'utiliser le théorème du prolongement de la classe \mathcal{C}^1 . La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* , continue sur \mathbb{R} , et pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \text{Arctan}(x)}{x^2} = \frac{x - (1+x^2)\text{Arctan}(x)}{(1+x^2)x^2}.$$

Or, $\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc

$$x - (1+x^2)\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - (1+x^2) \left(x - \frac{x^3}{3} \right) + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{2}{3}x^3.$$

Donc

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{2}{3}x^3}{(1+x^2)x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

donc, par le théorème de prolongement du caractère \mathcal{C}^1 , f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $f'(0) = 0$.

3. Étudier la parité, les variations et les limites en $\pm\infty$ de f . Dessiner le graphe de f .

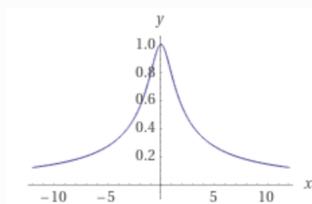
Correction

f est clairement paire, et sur \mathbb{R}_+ . Pour les variations, il faut étudier le signe de $g : x \mapsto x - (1+x^2)\text{Arctan}(x)$. Dérivons (encore!) g :

$$g' : x \mapsto 1 - 2x\text{Arctan}(x) - 1 = -2x\text{Arctan}(x) \leq 0,$$

donc g décroît sur \mathbb{R} . Comme $g(0) = 0$, g est positive sur \mathbb{R}_+ et négative sur \mathbb{R}_+ . Donc f est croissante sur \mathbb{R}_- et décroissante sur \mathbb{R}_+ .

Enfin, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$. D'où le graphe



4. Donner un développement asymptotique de $f(x)$ en $+\infty$ sous la forme $a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} +$

$$o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Correction

Là, il faut utiliser le fait que $\text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\frac{1}{x}$ lorsque $x > 0$. On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\frac{1}{x}}{x} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right). \end{aligned}$$

Exercice 13. ●●○ Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on considère la fonction $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto a^{(a^x)}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que f_a est de classe \mathcal{C}^∞ et donner l'expression de f'_a et f''_a . Montrer que si $a \geq 1$, f''_a ne s'annule pas et que si $a < 1$, f''_a s'annule en un unique point que l'on notera x_a et dont on déterminera l'expression explicite en fonction de a .
2. Soit $a \in]0, 1[$. Calculer $f_a^{(3)}(x_a)$. En déduire que x_a est le paramètre d'un point d'inflexion du graphe de f_a .
3. Déterminer le lieu des points d'inflexion du graphe de la fonction f_a lorsque a varie dans \mathbb{R}_+^* .

Exercice 14. ●●○ Étudier l'équation de la tangente ainsi que la position relative de la courbe d'équation $y = (\text{ch}(x))^{\frac{1}{x}}$, au point d'abscisse 0.

Correction

Il suffit de faire un développement limité en 0 de l'expression considérée : On écrit que $(\text{ch}(x))^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(\text{ch}(x))}{x}}$. Or, $\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, donc

$$\ln(\text{ch}(x)) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4),$$

donc

$$\begin{aligned} e^{\frac{\ln(\text{ch}(x))}{x}} &= e^{\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)} \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48} - \frac{x^3}{12} + o(x^3), \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3), \end{aligned}$$

donc la tangente à la courbe en 0 a pour équation $y = 1 + \frac{x}{2}$ et la courbe est localement au-dessus de sa tangente car $(\text{ch}(x))^{\frac{1}{x}} - \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{8}$.

Exercice 15. ●●○ Étudier les asymptotes éventuelles en $+\infty$ des courbes représentatives des fonctions suivantes, ainsi que la position relative de la courbe par rapport à son asymptote :

1. $f : x \mapsto (x+1)e^{\frac{1}{x}}$.

Correction

Pour traiter concrètement ce genre de problème, mieux vaut effectuer un développement asymptotique de l'expression plutôt que d'étudier $\frac{f(x)}{x}$:

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} (x+1) \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = x + 1 + 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = x + 2 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc la courbe de f a pour asymptote la droite d'équation $y = x + 2$ et comme $f(x) - (x + 2) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, \mathcal{C}_f est au-dessus de son asymptote en $+\infty$.

2. $g : x \mapsto \sqrt[3]{(x^2 - 1)(x + 2)}$.

Correction

De même, on essaie de faire un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt[3]{(x^2 - 1)(x + 2)} \\ &= \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - x - 2} \\ &= x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + o(x^2) \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) - \frac{4}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + \frac{2}{3} - \frac{7}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Donc la droite d'équation $y = x + \frac{2}{3}$ est asymptote à \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_g est sous son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 16. Le retour de la Suite définie implicitement. ●●○

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que l'équation

$$x + e^x = n$$

possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.

Correction

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + e^x$. La fonction f est continue, croissante strictement, tend vers $-\infty$ en $-\infty$, vers $+\infty$ en $+\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone aux limites, il existe une unique solution à l'équation $x + e^x = n$.

2. Déterminer la limite de (x_n) puis un équivalent simple de x_n .

Correction

Pour tout entier n , $f(x_n) = x_n < n + 1 = f(x_{n+1})$ et, par croissance de f , (x_n) est croissante. Donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge ou tend vers $+\infty$. Elle ne peut converger, car si elle convergeait vers ℓ , on aurait $x_n + e^{x_n} \xrightarrow{\ell} \ell$, absurde car $x_n + e^{x_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{+} +\infty$. Donc $x_n \xrightarrow{+} \infty$. Or, par croissances comparées, $x_n = o(e^{x_n})$, donc $x_n + e^{x_n} \sim e^{x_n}$, donc $e^{x_n} \sim n$. n tendant vers une limite différente de 1, on peut composer les équivalents par \ln , d'où $x_n \sim \ln(n)$.

3. Déterminer un équivalent de $x_n - \ln(n)$.

Correction

On cherche un équivalent de $x_n - \ln(n)$. Remarquons que

$$e^{x_n - \ln(n)} = e^{x_n} e^{-\ln(n)} = \frac{e^{x_n}}{n}.$$

Or, $x_n + e^{x_n} = n$, i.e.

$$\frac{e^{x_n}}{n} = \frac{n - x_n}{n} = 1 - \frac{x_n}{n}.$$

Donc

$$x_n - \ln(n) = \ln\left(1 - \frac{x_n}{n}\right).$$

Or, $\frac{x_n}{n} \sim \frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[+\infty]{} 0$, donc

$$x_n - \ln(n) \sim -\frac{x_n}{n} \sim \frac{-\ln(n)}{n}.$$

Exercice 17. *La vengeance de la suite définie implicitement.* ●●● On considère pour tout entier $n \geq 1$, l'unique solution $u_n \in [0, 1]$ de l'équation $x^n + x^{n-1} + \dots + x = 1$. Justifier l'existence de u_n , donner la monotonie de $(u_n)_{n \geq 1}$ et déterminer sa limite ℓ . Donner un équivalent simple de $u_n - \ell$.