

TD 08 Réduction

1 Vecteurs propres, valeurs propres, aspects géométriques

Exercice 1. CCINP 24. Soit φ l'application qui au polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P par $X^4 - 1$.

1. Prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

Correction

- Déjà, comme φ associe un reste de division euclidienne par $X^4 - 1$, pour tout P de $\mathbb{R}_3[X]$, $\varphi(P)$ est de degré < 4 , i.e. dans $\mathbb{R}_3[X]$.
- Ensuite, soient P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$, λ et μ deux réels. Écrivons

$$X^2P_1 = (X^4 - 1)Q_1 + \varphi(P_1) \text{ et } X^2P_2 = (X^4 - 1)Q_2 + \varphi(P_2)$$

Alors

$$X^2(\lambda P_1 + \mu P_2) = (X^4 - 1)(\lambda Q_1 + \mu Q_2) + (\lambda \varphi(P_1) + \mu \varphi(P_2)).$$

Mais comme $\deg(\lambda \varphi(P_1) + \mu \varphi(P_2)) \leq 3 < 4$, l'unicité du reste de la division euclidienne assure que $(\lambda \varphi(P_1) + \mu \varphi(P_2))$ est le reste de la division euclidienne de $X^2(\lambda P_1 + \mu P_2)$ par $X^4 - 1$. Ainsi,

$$\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda \varphi(P_1) + \mu \varphi(P_2),$$

donc φ est bien linéaire.

2. Donnez A la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. A est-elle diagonalisable? (on pourra calculer A^2)

Correction

On calcule l'image de chaque vecteur de la base canonique par φ :

- $X^2 \cdot 1 = 0 \cdot (X^4 - 1) + X^2$ donc $\varphi(1) = X^2$
- $X^2 \cdot X = 0 \cdot (X^4 - 1) + X^3$ donc $\varphi(X) = X^3$
- $X^2 \cdot X^2 = 1 \cdot (X^4 - 1) + 1$ donc $\varphi(X^2) = 1$
- $X^2 \cdot X^3 = X \cdot (X^4 - 1) + X$ donc $\varphi(X^3) = X$

En notant \mathcal{B} la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, on en déduit que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $A^2 = I_4$ donc A est la matrice d'une symétrie, donc elle est diagonalisable.

3. Donner le spectre de φ .

Correction

Comme $A^2 = I_4$, on en déduit que le spectre de φ est inclus dans les racines de $X^2 - 1$, i.e. $\{-1, 1\}$. Or, $A \neq I_4$ et $A \neq -I_4$ donc le spectre de A ne peut pas être seulement $\{1\}$ ou seulement $\{-1\}$: si c'était le cas, A serait directement égale à I_4 ou $-I_4$ (car une matrice semblable à une homothétie est nécessairement cette homothétie).

4. Donnez les sous-espaces propres de φ .

Correction

On raisonne matriciellement. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ sa matrice dans la base canonique \mathcal{B} . Alors on a les équivalences

$$P \in E_1(\varphi) \Leftrightarrow AU = U \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ d = b \\ a = c \\ b = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ d = b. \end{cases}$$

Donc $AU = U \Leftrightarrow U \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Donc $E_1(\varphi) = \text{Vect}(1 + X^2, X + X^3)$.

Un calcul presque identique assure que $E_{-1}(\varphi) = \text{Vect}(1 - X^2, X - X^3)$.

5. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donnez son inverse.

Correction

Étant donné le calcul qu'on a fait, A est inversible, d'inverse elle-même.

6. L'application φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?

Correction

L'application φ est un endomorphisme représenté par une matrice inversible, donc c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 2. Mines-Telecom 24. Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$. Soit $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto XB - BX$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction

Déjà, f est à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ensuite, soient A, A' deux matrices, λ et μ deux réels. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda A + \mu A') &= (\lambda A + \mu A')B - B(\lambda A + \mu A') \\ &= \lambda AB + \mu A'B - \lambda BA - \mu BA' \\ &= \lambda(AB - BA) + \mu(A'B - B'A) = \lambda f(A) + \mu f(A'), \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad f(A^k) = kA^k$.

Correction

Démontrons le résultat par récurrence sur k dans \mathbb{N}^* .

L'**initialisation** vient du fait que $AB - BA = A$.

Soit maintenant k dans \mathbb{N}^* tel que $f(A^k) = kA^k$, i.e. $A^k B - BA^k = kA^k$.

On remarque alors que l'on a

$$\begin{cases} A^k B - BA^k = kA^k \\ AB - BA = A \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par A à **gauche** et la deuxième ligne par A^k à **droite**, on obtient

$$\begin{cases} A^{k+1} B - ABA^k = kA^{k+1} \\ ABA^k - BA^{k+1} = A^{k+1} \end{cases}$$

D'où, en sommant les deux lignes, $A^{k+1} B - BA^{k+1} = (k+1)A^{k+1}$.

D'où l'hérédité, et le résultat par le principe de récurrence.

3. En déduire que A est nilpotente.

Correction

Si A n'était pas nilpotente, alors on aurait, pour tout k dans \mathbb{N} , k qui serait une valeur propre de f . Mais alors f admettrait une infinité de valeurs propres, ce qui est absurde. Donc on dispose de k dans \mathbb{N} tel que $A^k = 0_n$, i.e. A est nilpotente.

Exercice 3. Mines-Telecom 24. Soit $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A + \text{tr}(A)I_n$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction

Déjà, f est bien à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient ensuite A et B deux matrices, λ et μ deux réels. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda A + \mu B) &= (\lambda A + \mu B) + \text{tr}(\lambda A + \mu B)I_n \\ &= \lambda A + \mu B + (\lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B))I_n \text{ par linéarité de la trace} \\ &= \lambda(A + \text{Tr}(A)I_n) + \mu(B + \text{Tr}(B)I_n) \\ &= \lambda f(A) + \mu f(B), \end{aligned}$$

donc f est bien linéaire.

2. Trouver les valeurs propres de f .

Correction

Analyse. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f , A un vecteur propre associé. Alors $f(A) = \lambda A$. Donc

$$A + \text{Tr}(A)I_n = \lambda A,$$

d'où

$$(\lambda - 1)A = \text{Tr}(A)I_n.$$

On disjoint les cas

- si $\lambda = 1$, alors $\text{Tr}(A)I_n = 0_n$, donc $\text{Tr}(A) = 0$, i.e. A est de trace nulle.
- si $\lambda \neq 1$, alors $A = \mu I_n$, $\mu \in \mathbb{R}$. Donc, comme $\mu \neq 0$,

$$(\lambda - 1)\mu I_n = n\mu I_n, \text{ donc } \lambda - 1 = n, \text{ i.e. } \lambda = n + 1.$$

Synthèse. On vérifie que les deux valeurs de λ trouvées sont bien des valeurs propres :

- 1 est valeur propre : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors on a les équivalences

$$A + \text{Tr}(A)I_n = A \Leftrightarrow \text{Tr}(A) = 0,$$

d'où 1 est valeur propre, de sous-espace propre associé égal à $\ker(\text{Tr})$, de dimension $n^2 - 1$,

- $n + 1$ est valeur propre : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On refait une petite analyse-synthèse :
 - si A est vecteur propre associé à la valeur propre $n + 1$, $A + \text{Tr}(A)I_n = (n + 1)A$, donc $nA = \text{Tr}(A)I_n$, i.e. $A \in \text{Vect}(I_n)$,
 - si $A \in \text{Vect}(I_n)$, alors on dispose de $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $A = \mu I_n$, donc

$$f(A) = \mu f(I_n) = \mu(I_n + \text{Tr}(I_n)I_n) = \mu(n + 1)I_n = (n + 1)A,$$

donc A est vecteur propre de f associé à $n + 1$.

3. f est-elle diagonalisable ?

Correction

On a vu que f possédait deux valeurs propres :

- 1 associée au sous-espace propre $\ker(\text{Tr})$, de dimension $n^2 - 1$,
 - $n + 1$ associée au sous-espace propre $\text{Vect}(I_n)$, de dimension 1,
- donc, comme $n^2 - 1 + 1 = n^2$, f est bien diagonalisable.

4. Donner $\text{tr}(f)$ et $\det(f)$.

Correction

Par définition, $\text{Tr}(f)$ est la somme des valeurs propres de f , donc $\text{Tr}(f) = n^2 - 1 + n + 1 = n(n + 1)$, et $\det(f)$ est leur produit, donc $\det(f) = n + 1$.

5. f est-elle un automorphisme ?

Correction

Le déterminant de f est non nul, donc f est un automorphisme.

6. Lien entre Id_E , f et f^2 ?

Correction

On calcule f^2 . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} f(f(A)) &= f(A + \text{Tr}(A)\text{I}_n) \\ &= f(A) + \text{Tr}(A)(n+1)\text{I}_n \\ &= A + \text{Tr}(A)\text{I}_n + \text{Tr}(A)(n+1)\text{I}_n \\ &= (n+2)(A + \text{Tr}(A)\text{I}_n) - (n+1)A, \end{aligned}$$

donc

$$f^2 - (n+2)f + (n+1)\text{Id}_E = 0_E,$$

ce qui est cohérent avec les valeurs propres déjà trouvées !

7. Donner f^{-1} .

Correction

Par la question précédente,

$$f \circ (f - (n+2)\text{Id}_E) = -(n+1)\text{Id}_E,$$

donc

$$f^{-1} = \frac{n+2}{n+1}\text{Id}_E - \frac{1}{n+1}f.$$

Exercice 4. Mines-Telecom 24. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et soit f définie par : $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(X) = AX$.

1. Montrer que f est linéaire.

Correction

Soient X et Y dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, λ et μ dans \mathbb{R} . Alors

$$f(\lambda X + \mu Y) = A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = \lambda f(X) + \mu f(Y),$$

d'où la linéarité de f .

2. Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$

Correction

- Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} X \in \ker(f) &\Leftrightarrow AX = 0_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow a+c = b+d = 0 \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Donc $\ker(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors on remarque que

$$f(X) = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Donc $\text{Im}(f) \subset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

L'inclusion réciproque se démontre, ou bien directement, ou bien via le théorème du rang (car $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\ker(f)) = 2$).

3. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction

On calcule

$$f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} + E_{21}$$

$$f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{12} + E_{22}$$

$$f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} + E_{21}$$

$$f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{12} + E_{22},$$

D'où, en notant $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Donner le spectre de f .

Correction

On peut calculer le polynôme caractéristique de f , **ou bien** remarquer que, pour tout X dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$f^2(X) = A^2X = 2AX = 2f(X),$$

donc $X^2 - 2X$ annule f , ce qui assure que le spectre de f est inclus dans $\{0, 2\}$.

5. Donner les espaces propres associés.

Correction

On a déjà calculé $\ker(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$. Ensuite, si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} f(X) = 2X &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c-a & d-b \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Donc l'espace propre associé à la valeur propre 2 est

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice 5. CCINP 18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace non nulle.

On définit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto (\text{tr}(A))M - (\text{tr}(M))A$.

1. Justifier brièvement que f est un endomorphisme.

Correction

Déjà, f est bien à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ensuite, si M et N sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si λ et μ sont dans \mathbb{C} ,

$$\begin{aligned} f(\lambda M + \mu N) &= \text{Tr}(A)(\lambda M + \mu N) - \text{Tr}(\lambda M + \mu N)A \\ &= \lambda \text{Tr}(A)M + \mu \text{Tr}(A)N - \lambda \text{Tr}(M)A - \mu \text{Tr}(N)A \\ &= \lambda f(M) + \mu f(N), \end{aligned}$$

donc f est bien linéaire.

2. Déterminer le noyau et l'image de f .

Correction

Détermination du noyau. Soit $M \in \ker(f)$. Alors $\text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A = 0$, donc $M =$

$\frac{\text{Tr}(M)}{\text{Tr}(A)}A$, donc $M \in \text{Vect}(A)$.

Réciproquement, on remarque que $f(A) = 0$ donc $\text{Vect}(A) \subset \ker(f)$, donc $\ker(f) = \text{Vect}(A)$.

Détermination de l'image. On remarque que si $N \in \text{Im}(f)$, alors on dispose de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $N = \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A$. Ainsi,

$$\text{Tr}(N) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(M) - \text{Tr}(M)\text{Tr}(A) = 0.$$

Donc $\text{Im}(f) \subset \ker(\text{Tr})$.

Or, par le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(f)) = n^2 - \dim(\ker(f)) = n^2 - 1 = \dim(\ker(\text{Tr}))$.

Donc, par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit que $\text{Im}(f) = \ker(\text{Tr})$.

3. Déterminer les sous-espaces propres de f . f est-il diagonalisable ?

Correction

- Déjà, on a vu que 0 est valeur propre de f , associée au sous-espace propre $\text{Vect}(A)$. Ce sous-espace propre est de dimension 1.
- Ensuite, on cherche un deuxième sous-espace propre. Si $M \in \ker(\text{Tr})$, alors

$$f(M) = \text{Tr}(A)M,$$

donc $\ker(\text{Tr})$ est inclus dans le sous-espace propre associé à la valeur propre $\text{Tr}(A)$.

Réciproquement, si M est dans le sous-espace propre associé à la valeur propre $\text{Tr}(A)$, $f(M) = \text{Tr}(A)M$ donc $\text{Tr}(M)A = 0$ donc $\text{Tr}(M) = 0$.

Ce sous-espace propre est de dimension $n^2 - 1$.

Or, $1 + n^2 - 1 = n^2$, donc f est diagonalisable.

4. Calculer $f \circ f(M)$, et en déduire d'une seconde façon que f est diagonalisable.

Correction

On calcule. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors

$$\begin{aligned} f(f(M)) &= f(\text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A) \\ &= \text{Tr}(A)f(M) - \text{Tr}(M)f(A) \\ &= \text{Tr}(A)f(M), \end{aligned}$$

donc $f^2 - \text{Tr}(A)f = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))}$ donc $X^2 - \text{Tr}(A)X$ est un polynôme annulateur de f , scindé à racines simples, donc f est diagonalisable, de valeurs propres 0 et $\text{Tr}(A)$.

Exercice 6. CCINP 2019. Soit E l'espace des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Pour $f \in E$, on pose : $\phi(f)(0) = f(0)$ et $\phi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ si $x \neq 0$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme de E .

Correction

La linéarité est évidente, par linéarité de l'intégrale.

Ensuite, soit $f \in E$. La fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est dérivable donc continue sur $[0, 1]$.

Donc $\phi(f)$ est continue sur $]0, 1]$. Reste à voir si elle est continue en 0. Soit $x \in]0, 1]$.

Alors

$$\phi(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} F'(0) = f(0),$$

donc $\phi(f)$ est continue en 0, donc ϕ est bien à valeurs dans E .

2. Montrer que 0 n'est pas une valeur propre de ϕ .

Correction

Soit $f \in \ker(\phi)$. Alors $\phi(f)(x) = 0$ pour tout $x > 0$, donc $\int_0^x f(t)dt = 0$ pour tout $x > 0$ donc, en dérivant par rapport à x , $f(x) = 0$ pour tout $x > 0$ donc, par continuité, f est nulle sur $[0, 1]$.

Donc $\ker(\phi) = \{0_E\}$, donc 0 n'est pas une valeur propre de ϕ .

3. Montrer que 1 est une valeur propre de ϕ et trouver l'espace propre associé.

Correction

Soit $f \in \ker(\phi - \text{Id}_E)$. Alors pour tout $x > 0$, $\phi(f)(x) = f(x)$, donc

$$\forall x \in [0, 1], \int_0^x f(t)dt = xf(x),$$

d'où f est dérivable et, en dérivant par rapport à x , pour tout $x > 0$,

$$f(x) = f(x) + xf'(x),$$

donc pour tout $x > 0$, $f'(x) = 0$, i.e. f est constante.

Réciproquement, si f est constante, on a bien $\phi(f) = f$.

Ainsi, 1 est une valeur propre de ϕ et l'espace propre associé est l'ensemble des fonctions constantes.

4. Déterminer les autres valeurs propres.

Correction

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $f \in \ker(\phi - \lambda \text{Id}_E)$. Alors pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x f(t)dt = \lambda xf(x),$$

d'où f est dérivable sur $]0, 1]$ et pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \lambda f(x) + \lambda xf'(x),$$

i.e.

$$f'(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda x} f(x) = 0,$$

donc on dispose de $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = A e^{\frac{1-\lambda}{\lambda} \ln(x)} = A x^{\frac{1}{\lambda}-1}.$$

Mais f doit être continue sur $[0, 1]$ donc on doit avoir $\frac{1}{\lambda} - 1 \geq 0$, i.e. $0 < \lambda \leq 1$.

Réciproquement, si $\lambda \in]0, 1]$, $\text{Vect}(x \mapsto x^{\frac{1}{\lambda}-1})$ est l'espace propre associé à λ .

Exercice 7. Centrale 22. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients sont positifs et vérifient : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n M_{i,j} = 1$ (la somme des coefficients d'une ligne vaut 1).

1. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est stable par multiplication.

Correction

Soient M et N deux matrices stochastiques. Soit j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n [MN]_{ij} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n [M]_{ik} [N]_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n [M]_{ik} \sum_{j=1}^n [N]_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n [M]_{ik} \times 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

donc MN est une matrice stochastique.

2. Montrer que 1 est valeur propre de toute matrice stochastique.

Correction

Soit U le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1. Alors

$$[MU]_{i,1} = \sum_{k=1}^n [M]_{ik} [U]_{k,1} = \sum_{k=1}^n [M]_{ik} = 1,$$

donc $MU = U$, donc U est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

3. Montrer que toute valeur propre d'une matrice stochastique est de module inférieur ou égal à 1.

Correction

Soit M une matrice stochastique. Soit λ une valeur propre complexe de M , V un vecteur

propre associé. Alors $MV = \lambda V$, et pour tout i , en notant $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$,

$$[MV]_i = \sum_{k=1}^n [M]_{ik} v_k,$$

donc

$$\lambda v_i = \sum_{k=1}^n [M]_{ik} v_k.$$

On prend en particulier i tel que $|v_i| = \max_{1 \leq k \leq n} |v_k|$, on a

$$\begin{aligned} |\lambda| \cdot |v_i| &= \left| \sum_{k=1}^n [M]_{ik} v_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n [M]_{ik} |v_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^n [M]_{ik} |v_i| = |v_i|. \end{aligned}$$

Mais $|v_i| \neq 0$ car $V \neq 0_{n,1}$, donc $|\lambda| \leq 1$.

4. Montrer que si X est propre pour une matrice stochastique, pour une valeur propre de module 1, alors le vecteur dont les coordonnées sont les modules de celles de X est propre pour 1

Correction

Soit $X = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour λ , une valeur propre de module 1. Avec le même raisonnement que précédemment, on obtient, pour i quelconque non nul,

$$\begin{aligned} |v_i| = |\lambda| \cdot |v_i| &= \left| \sum_{k=1}^n [M]_{ik} v_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n [M]_{ik} |v_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^n [M]_{ik} |v_i| = |v_i|, \end{aligned}$$

donc il y a égalité dans toutes les inégalités, donc

$$\sum_{k=1}^n [M]_{ik} |v_k| = |v_i|,$$

donc $\begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M pour la valeur propre 1.

Exercice 8. Centrale 19. Soit n un entier naturel. On considère la matrice $A_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $a_{j-1,j} = j - 1$, $a_{j+1,j} = n + 1 - j$ pour tout j et dont tous les autres coefficients sont nuls.

1. Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie A_{n+1} .

Correction

On propose

```

1 import numpy as np
2 import numpy.linalg as alg
3
4 def A(n):
5     res = np.zeros((n,n))
6     for i in range(n):
7         if i > 0:
8             res[i-1,i] = i
9         if i < n-1:
10            res[i+1,i] = n-i-1
11     return res
12
13 for n in range(1,5):
14     print(alg.eigvals(A(n)))

```

Objectivement, le fait que la matrice soit décrite avec $n + 1$, et que les tableaux python commencent à 0, est un problème : j'ai dû m'y prendre à 2 fois.

2. Déterminer avec Python les valeurs propres de A_{n+1} . Que peut-on conjecturer ?

Correction

On obtient

```

15 [ 0. ]
16 [ 1. -1.]
17 [-2.00000000e+00 -1.73255507e-16  2.00000000e+00]
18 [-3. -1.  3.  1.]
    
```

La matrice semble être diagonalisable (valeurs propres deux à deux distinctes), et, si λ est valeur propre, $-\lambda$ semble aussi l'être.

3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ canoniquement associé à la matrice A_{n+1} . Montrer qu'il existe un polynôme Q ne dépendant pas de n tel que pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = QP' + nXP$.

Correction

Soit j dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Alors $u(1) = nX$, $u(X^n) = nX^{n-1}$.

$$u(X^j) = jX^{j-1} + (n-j)X^{j+1} = jX^{j-1}(1 - X^2) + nX \cdot X^j = Q(X) \times (X^j)' + nX(X^j),$$

avec $Q = 1 - X^2$.

D'où le résultat, par linéarité!

4. En déduire les éléments propres de u .

Correction

On recherche alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et P non nul tels que $u(P) = \lambda P$, i.e.

$$(1 - X^2)P' + nXP = \lambda P,$$

donc

$$P' - \frac{nX - \lambda}{X^2 - 1}P = 0,$$

donc $P : x \mapsto \alpha \cdot \exp(A(x))$, où A est une primitive de $x \mapsto \frac{nX - \lambda}{X^2 - 1} = \frac{n - \lambda}{2(x - 1)} + \frac{n + \lambda}{2(x + 1)}$, i.e. $\frac{n - \lambda}{2} \ln(|x - 1|) + \frac{n + \lambda}{2} \ln|x + 1|$ donc

$$P : x \mapsto \alpha|x - 1|^{\frac{n-\lambda}{2}} + \alpha|x + 1|^{\frac{n+\lambda}{2}}.$$

Afin que P soit un polynôme, il faut que $\frac{n - \lambda}{2}$ et $\frac{n + \lambda}{2}$ soient des entiers, pairs, entre 0 et n . Ainsi, λ doit être égal à $\{-n, -n + 2, \dots, n - 2, n\}$. Réciproquement, de tels λ fonctionnent.

Et Python corrobore nos résultats!

5. La matrice A_{n+1} est-elle diagonalisable?

Correction

La matrice est donc diagonalisable : elle a n valeurs propres distinctes!

2 Utilisation de polynômes : diagonalisation concrète

Exercice 9. CCINP 24. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est diagonalisable ; déterminer son spectre et ses sous-espaces propres.

Correction

Déjà, M est symétrique réelle donc diagonalisable. Ensuite, on calcule

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = M + 2I_3,$$

donc le polynôme $X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$ annule M . Ainsi M est diagonalisable car annihilée par un polynôme scindé à racines simples, et à spectre inclus dans $\{-1, 2\}$.

Cherchons les sous-espaces propres de M . Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- (espace propre associé à la valeur propre -1) On a les équivalences

$$MX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = -x \\ x + z = -y \\ x + y = -z \end{cases} \\ \Leftrightarrow x + y + z = 0,$$

L'espace propre $E_{-1}(M)$ est donc l'hyperplan d'équation $x + y + z = 0$, i.e.

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

- (espace propre associé à la valeur propre 2) On a les équivalences

$$MX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 2x \\ x + z = 2y \\ x + y = 2z \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow_{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x + y - 2z = 0 - 2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{cases} x + y - 2z = 0 & 3y - 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

En fait, on aurait pu calculer directement $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et dire que comme

$E_{-1}(M)$ est de dimension 2, E_2 était nécessairement de dimension 1, donc égal à $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $R(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$. Écrire $R(a, b)$ en fonction de I_3, M, a et b .

Montrer que $R(a, b)$ est diagonalisable. Déterminer le spectre de $R(a, b)$.

Correction

Déjà, on remarque que $R(a, b) = aI_3 + bM$. Ensuite, on sait que M est diagonalisable donc on dispose de P dans $GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$M = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} R(a, b) &= aPI_3P^{-1} + bP \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

On en déduit que $R(a, b)$ est diagonalisable et que son spectre est $\{a - b, a + 2b\}$.

Exercice 10. Mines-Telecom 24. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. On note I et S ses valeurs propres avec $I \leq S$.

1. Donner les expressions de I et S .

Correction

On calcule le polynôme caractéristique de M (qui est aussi une variable aléatoire!) Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \chi_M(t) &= \begin{vmatrix} t-X & -Y \\ -Y & t-X \end{vmatrix} \\ &= (t-X)^2 - Y^2 \\ &= (t-X-Y)(t-X+Y), \end{aligned}$$

donc $I = X - Y$ et $S = X + Y$.

2. Calculer la probabilité que M soit inversible.

Correction

La probabilité que M soit inversible est la probabilité que ses valeurs propres ne soient jamais nulles, i.e. que $I \neq 0$ et $S \neq 0$. Déjà, comme X et Y sont à valeurs dans \mathbb{N}^* , on sait que S ne s'annule jamais. Donc la probabilité que M soit inversible est

$$\begin{aligned}
 1 - \mathbb{P}(I = 0) &= 1 - \mathbb{P}(X = Y) \\
 &= 1 - \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X = Y, Y = n) \text{ car } (Y = n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est un système complet d'événements} \\
 &= 1 - \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X = n, Y = n) \\
 &= 1 - \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n) \text{ par indépendance} \\
 &= 1 - \sum_{n \geq 1} (pq^{n-1})^2 \text{ en posant } q = 1 - p \\
 &= 1 - p^2 \sum_{n \geq 1} (q^2)^{n-1} \\
 &= 1 - p^2 \frac{1}{1 - q^2} \\
 &= \boxed{1 - \frac{p}{1 + q} = \frac{2p}{1 + q}}.
 \end{aligned}$$

3. Calculer la covariance de I et de S . Les variables I et S sont-elles indépendantes ?

Correction

On calcule

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(I, S) &= \text{Cov}(X - Y, X + Y) \\
 &= \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y) - \text{Cov}(Y, X) - \text{Cov}(Y, Y) \text{ par bilinéarité} \\
 &= \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y) \text{ par symétrie} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

car X et Y suivent la même loi. Donc I et S sont non corrélées. Cependant, elles ne sont pas indépendantes :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(I = 1, S = 2) &= \mathbb{P}(X - Y = 1, X + Y = 2) \\
 &= \mathbb{P}(X - Y = 1, X = Y = 1) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont à valeurs dans } \mathbb{N}^*, \text{ donc } (X + Y = 2) = (X = 1, Y = 1) \\
 &= 0 \neq \mathbb{P}(I = 1)\mathbb{P}(S = 2).
 \end{aligned}$$

Exercice 11. Mines-Telecom 24. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M_{i,j} = \begin{cases} (-1)^i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Correction

La matrice M est symétrique réelle, donc, par le théorème spectral, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Caractériser les éléments diagonaux de M^2 .

Correction

On calcule : soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

$$\begin{aligned} [M]_{ii} &= \sum_{k=1}^n [M]_{ik} [M]_{ki} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} 1 + [M]_{ii}^2 \\ &= n. \end{aligned}$$

On suppose maintenant que n est pair.

3. Déterminer la trace de M , puis la trace de M^2 .

Correction

On remarque que $\text{Tr}(M) = -1 + 1 - 1 + 1 \cdots = 0$ (car n est pair) et $\text{Tr}(M^2) = n^2$.

4. Montrer que 0 et (-2) sont valeurs propres de M , et montrer une inégalité entre les dimensions de leurs sous-espaces propres et $p - 1$, avec p tel que $n = 2p$.

Correction

On remarque que M possède p colonnes identiques, donc son noyau est au moins de dimension $p - 1$: tous les vecteurs du type $e_2 - e_4, e_2 - e_6, \dots$ sont des éléments du noyau. Mais on remarque aussi que la famille $(C_2, C_1, C_3, C_5, \dots, C_{2p-1})$ est libre (c'est assez simple à voir) donc $\ker(M)$ est de dimension **égale à** $p - 1$.

Ensuite, on remarque que $M + 2I_n$ a ses colonnes C_1, C_3, \dots qui sont égales, donc $(e_1 - e_3, e_1 - e_5, \dots)$ sont $p - 1$ éléments du noyau de $M + 2I_n$. De même, si on note D_1, \dots, D_{2p} les colonnes de M , $(D_1, D_2, D_4, \dots, D_{2p})$ forment une famille libre donc la dimension de $\ker(M + 2I_n)$ est égale à $p - 1$.

5. Déterminer $\text{sp}(M)$.

Correction

On sait que M est diagonalisable, et on a trouvé 0 qui était valeur propre de multiplicité $p - 1$ et -2 qui est aussi valeur propre de multiplicité $p - 1$. Il reste donc deux valeurs propres (éventuellement égales) λ et μ . Or,

- $\text{Tr}(M) = 0$ donc $-2(p - 1) + \lambda + \mu = 0$, i.e. $\lambda + \mu = 2(p - 1)$

• $\text{Tr}(M^2) = n^2$ donc $4(p-1) + \lambda^2 + \mu^2 = n^2 = 4p^2$, i.e. $\lambda^2 + \mu^2 = 4p^2 - 4(p-1)$.
 En mettant la première égalité au carré, on obtient $\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu = 4(p-1)^2$, donc, à l'aide de la deuxième égalité,

$$2\lambda\mu = 4(p-1)^2 - \lambda^2 - \mu^2 = 4(p-1)^2 + 4(p-1) - 4p^2 = 4p(p-1) - 4p^2 = -4p,$$

donc $\lambda + \mu = 2(p-1)$ et $\lambda\mu = -2p$, donc λ et μ sont les deux racines du polynôme du second degré

$$X^2 - 2(p-1)X - 4p,$$

de discriminant $4(p-1)^2 + 8p = 4(p^2 + 1) > 0$, d'où

$$\lambda = (p-1) - \sqrt{1+p^2} \text{ et } \mu = (p-1) + \sqrt{1+p^2}.$$

6. Questions supplémentaires posées par le jury : Que pouvez-vous dire de l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à M ? Dites tout ce que vous savez sur le rang d'une matrice.

Exercice 12. Mines-Telecom 24. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$

1. Trouver une matrice P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Correction

Il s'agit de diagonaliser A . Comme A est triangulaire supérieure, on voit qu'elle possède deux valeurs propres, 3 et -12 , distinctes, donc elle est diagonalisable. En particulier, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 3. Pour le second vecteur propre, associé à la valeur propre -12 , on a, pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, les équivalences

$$AX = -12X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y = -12x \\ -12y = -12y \end{cases} \Leftrightarrow 3x + y = 0,$$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre -12 . Ainsi, si on pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

on a $A = PDP^{-1}$, par les formules de changement de base.

2. Soit M une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels. Montrer que si M vérifie $M^3 + 2M = A$ alors les matrices D et $Q = P^{-1}MP$ commutent. En déduire que Q est diagonale.

Correction

On note $Q = P^{-1}MP$. Alors, comme $M^3 + 2M = A$, on en déduit que

$$PQ^3P^{-1} + 2PQP^{-1} = PDP^{-1} \text{ donc } Q^3 + 2Q = D.$$

Ainsi,

$$QD = Q(Q^3 + 2Q) = Q^4 + 2Q^2 = (Q^3 + 2Q)Q = DQ,$$

donc Q commute avec D . En écrivant $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, l'équation $QD = DQ$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 3a & -12b \\ 3c & -12d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ -12c & -12d \end{pmatrix},$$

d'où $b = c = 0$ donc Q est diagonale.

3. Trouver toutes les matrices M vérifiant $M^3 + 2M = A$.

Correction

Analyse. Soit M vérifiant $M^3 + 2M = A$. Alors, en posant $Q = P^{-1}MP$, on en déduit que $Q^3 + 2Q = D$, i.e., en écrivant $Q = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$,

$$a^3 + 2a = 3 \text{ et } d^3 + 2d = -12.$$

On remarque (ouf!) que 1 est racine de $X^3 + 2X - 3$, donc

$$X^3 + 2X - 3 = (X - 1)(X^2 + X + 3),$$

et le polynôme $X^2 + X + 3$ n'admet pas de racine réelle. Donc $a = 1$ nécessairement. Ensuite, on remarque (re-ouf!) que -2 est racine de $X^3 + 2X + 12$, donc

$$X^3 + 2X + 12 = (X + 2)(X^2 - 2X + 6),$$

et le polynôme $X^2 - 2X + 6$ n'admet pas de racine réelle, donc $d = -2$. Donc nécessairement, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} M &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Exercice 13. Centrale 24. 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension n . On suppose que u possède exactement 2 valeurs propres distinctes, λ_1 et λ_2 . Montrer que u est diagonalisable si et seulement si il existe deux projecteurs p_1 et p_2 tels que $u = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ et $p_1 + p_2 = \text{Id}_E$.

Correction

Si u est diagonalisable, on dispose d'une base \mathcal{B} dans laquelle la matrice de u est diagonale. Quitte à réordonner les vecteurs, on peut écrire

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & (0) \\ (0) & \lambda_2 I_{n_2} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} I_{n_1} & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} (0) & (0) \\ (0) & I_{n_2} \end{pmatrix} = \lambda_1 \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_1) + \lambda_2 \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_2),$$

où p_1 et p_2 sont, étant données leur matrices, des projecteurs tels que $p_1 + p_2 = \text{Id}_E$.
S'il existe deux projecteurs p_1 et p_2 tels que $u = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ et $p_1 + p_2 = \text{Id}_E$, alors on montre que u est diagonalisable. Le plus simple est de montrer que $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ annule u :

$$\begin{aligned} (u - \lambda_1 \text{Id}_E) \circ (u - \lambda_2 \text{Id}_E) &= (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 - \lambda_1 \text{Id}_E) \circ (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 - \lambda_2 \text{Id}_E) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) p_2 \circ (\lambda_1 - \lambda_2) p_1 \\ &= -(\lambda_1 - \lambda_2)^2 p_2 \circ p_1 \\ &= -(\lambda_1 - \lambda_2)^2 p_2 \circ (\text{Id}_E - p_2) \\ &= 0_{\mathcal{L}(E)}, \end{aligned}$$

donc u est annulé par un polynôme scindé à racines simples, donc est diagonalisable.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Montrer que $A = \begin{pmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+b \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Correction

Je ne sais pas quel est le lien avec la question précédente... On écrit que $A = aJ + bI_n$, J est diagonalisable (on l'a fait 3 fois en cours), donc $J = PDP^{-1}$, donc $A = P(aD + bI_n)P^{-1}$ est diagonalisable.

Exercice 14. Mines-Telecom 22. Diagonaliser $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ puis résoudre le système diffé-

$$\text{rentiel } \begin{cases} x' = y - z \\ y' = 2x + y + z \\ z' = -2x - y - z \end{cases}$$

Correction

Déjà, on calcule le polynôme caractéristique de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Pour tout x dans \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} \chi_M(x) &= \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & x-1 & -1 \\ 2 & 1 & x+1 \end{vmatrix} \\ &=_{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ -2 & x-1 & -1 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} \\ &=_{C_2 \leftarrow C_2 - C_3} \begin{vmatrix} & -1 & \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} \\ &= x \begin{vmatrix} x & -2 \\ -2 & x \end{vmatrix} \text{ en développant selon la dernière ligne.} \\ &= x(x^2 - 4) \\ &= x(x-2)(x+2), \end{aligned}$$

donc χ_M est scindé à racines simples, donc M est diagonalisable.
On cherche alors les sous-espaces propres associés :

- pour la valeur propre 0 : soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} MX = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ -2x - y - z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \\ y = \alpha \\ x = -\alpha \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

- pour la valeur propre 2 : soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} MX = 2X &\Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 2x \\ 2x + y + z = 2y \\ -2x - y - z = 2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ -2x - y - 3z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -2x - y - 3z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \\ y = -\alpha \\ x = -\alpha \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

- pour la valeur propre -2 : soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned}
 MX = 2X &\Leftrightarrow \begin{cases} y - z = -2x \\ 2x + y + z = -2y \\ -2x - y - z = -2z \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ -2x - y + z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \\ y = -\alpha \\ x = \alpha \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

On sait donc que si $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$MP = PD, \text{ où } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel s'écrit $X'(t) = MX(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, i.e.

$$P^{-1}X' = DP^{-1}X.$$

On pose alors

$$Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

Alors u, v, w sont solutions de

$$\begin{cases} u'(t) = 0 \\ v'(t) = 2v(t) \\ w'(t) = -2w(t) \end{cases}$$

Donc on dispose de (λ, μ, ν) réels tels que

$$\begin{cases} u(t) = \lambda \\ v(t) = \mu e^{2t} \\ w(t) = \nu e^{-2t} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout t dans \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu e^{2t} \\ \nu e^{-2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda + \mu e^{2t} + \nu e^{-2t} \\ \lambda + \mu e^{2t} - \nu e^{-2t} \\ \lambda - \mu e^{2t} + \nu e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Réciproquement, de telles fonctions sont solutions : on ne le vérifie pas pour un tel exercice.

Exercice 15. Mines-Telecom 24. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Trouver un polynôme annulateur de M de degré 3.

Correction

On calcule M^2 et M^3 ! Déjà,

$$M^2 = \begin{pmatrix} -(a^2 + b^2) & -bc & ac \\ -bc & -(a^2 + c^2) & -ab \\ ac & -ab & -(b^2 + c^2) \end{pmatrix}.$$

Ensuite, si on note $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\|u\|^2 = a^2 + b^2 + c^2$,

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & a\|u\|^2 & b\|u\|^2 \\ -a\|u\|^2 & 0 & c\|u\|^2 \\ -b\|u\|^2 & -c\|u\|^2 & 0 \end{pmatrix} = -\|u\|^2 M,$$

donc $X^3 + \|u\|^2 X = X(X - i\|u\|)(X + i\|u\|)$ annule M

2. M est-elle inversible ?

Correction

Comme M est antisymétrique, $\det(M) = \det(M^T) = \det(-M) = (-1)^3 \det(M) = -\det(M)$, donc $\det(M) = 0$, donc M n'est pas inversible.

3. M est-elle diagonalisable ?

Correction

Déjà, si $a = b = c = 0$, alors M est la matrice nulle.

Ensuite, on suppose $\|u\| \neq 0$. Alors M est annihilée par un polynôme scindé à racines simples sur \mathbb{C} donc M est diagonalisable sur \mathbb{C} . En revanche, la seule valeur propre réelle de M est 0 et M n'est pas la matrice nulle donc M n'est pas diagonalisable sur \mathbb{R} .

4. Montrer que les valeurs propres de M^2 sont négatives ou nulles.

Correction

Le spectre de M est inclus dans $\{0, -i\|u\|, i\|u\|\}$ donc le spectre de M est inclus dans $\{0, -\|u\|^2\}$, ce qui correspond bien à des valeurs négatives ou nulles.

Exercice 16. Mines 22. Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & (0) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Correction

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Déjà, la matrice M est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable. Ensuite, on voit aisément que $\text{rg}(M) = 2$, une base de son noyau est $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_{n-1})$.

Il reste donc deux valeurs propres de M à trouver. Si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors

$$MX = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 + \dots + x_n \end{pmatrix}$$

Je n'ai pas envie de calculer le polynôme caractéristique et vais montrer comment faire sans.

Analyse. Supposons que l'on ait une valeur propre $\lambda \neq 0$ et un vecteur propre associé X . Alors

$$\begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + \dots + x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Ainsi, comme $\lambda \neq 0$, $x_1 = \dots = x_{n-1} = \frac{x_n}{\lambda}$. En particulier, comme $X \neq 0_{n,1}$, $x_n \neq 0$. On a ensuite l'équivalence

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_n = \lambda x_n &\Leftrightarrow \frac{n-1}{\lambda} x_n + x_n = \lambda x_n \\ &\Leftrightarrow \frac{n-1}{\lambda} + 1 = \lambda \\ &\Leftrightarrow n-1 + \lambda = \lambda^2 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation du second degré, de discriminant $1+4n-4 = 4n-3 > 0$ possède deux solutions

$$\frac{1 - \sqrt{4n-3}}{2} \text{ et } \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}.$$

On trouve pour chaque λ un vecteur propre correspondant, de la forme $\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a ainsi diagonalisé M !

3 Utilisation de polynômes : exercices plus théoriques

Exercice 17. Mines-Telecom 24. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = 4A^2$. On suppose que 2 et -2 sont valeurs propres de A . Montrer que A est diagonalisable.

Correction

Déjà, on remarque que $X^4 - 4X^2 = X^2(X^2 - 4)$ est un polynôme annulateur de A . Donc les valeurs propres de A sont dans $\{0, 2, -2\}$. Deux possibilités alors

- si 0 est valeur propre de A , alors A possède 3 valeurs propres et est de dimension 3 donc A est diagonalisable,
- si 0 n'est pas valeur propre de A , alors comme $A^4 = 4A^2$, $A^2 = 4I_3$, donc $X^2 - 4$ est annulateur de A , donc A est annulé par un polynôme scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

Exercice 18. CCINP 24. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui vérifie $\text{tr}(M) = 0$ et $M^3 - 4M = 0$.

1. Démontrer que les valeurs propres de M sont racines du polynôme $P = X^3 - 4X$.

Correction

C'est une question de cours : $X^3 - 4X$ est un polynôme annulateur de M donc les valeurs propres de M sont des racines de ce polynôme.

2. Caractériser les matrices vérifiant les conditions de l'énoncé.

Correction

Si M est une telle matrice, alors les valeurs propres de M sont à chercher parmi les racines de $X^3 - 4X = X(X - 2)(X + 2)$. Donc M possède un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc M est diagonalisable.

Comme $\text{Tr}(M) = 0$, les multiplicités de 2 et celle de -2 doivent être égales. Ainsi, M peut être semblable à l'une des trois matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, toute matrice semblable à l'une de ces trois matrices vérifie les conditions de l'énoncé.

Exercice 19. CCINP 24. Soit $n \geq 2$. On considère $u : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto aM + bM^T$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction

Pour vous !

2. Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de u .

Correction

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} u^2(M) &= a.u(M) + b.u(M)^\top \\ &= a(aM + bM^\top) + b(aM^\top + bM) \\ &= (a^2 + b^2)M + 2abM^\top \\ &= 2a(aM + bM^\top) + (b^2 - a^2)M \\ &= 2au(M) + (b^2 - a^2)\text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(M), \end{aligned}$$

donc $X^2 - 2aX - (b^2 - a^2)$ est annulateur de u .

3. Trouver les valeurs propres de u .

Correction

Par le cours, les racines de u sont parmi les racines du polynôme trouvé précédemment. Or, le discriminant du polynôme est $4a^2 + 4(b^2 - a^2) = 4b^2$, d'où les racines $a + b$ et $a - b$.

4. u est-il diagonalisable ?

Correction

Si $a + b \neq a - b$, i.e. $b \neq 0$, alors u est annulé par un polynôme scindé à racines simples donc est diagonalisable.

Sinon, $b = 0$, donc $u = a\text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc u est diagonalisable.

Exercice 20. Mines-Telecom 24. On s'intéresse aux matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient (*) $\begin{cases} M^3 - 4M^2 + 4M = 0 \\ \text{tr}(M) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que si M vérifie (*), alors les valeurs propres de M sont racines du polynôme $P = X^3 - 4X^2 + 4X$.

Correction

C'est une question de cours. Soit λ une valeur propre de M . Alors on dispose de U non nul tel que $MU = \lambda U$. Alors $(M^3 - 4M^2 + 4M)U = 0$ donc $(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda)U = 0$. Comme U est non nul, nécessairement, $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$.

2. Exprimer les matrices M vérifiant (*).

Correction

Soit M une matrice vérifiant (*). On factorise le polynôme

$$X^3 - 4X^2 + 4X = X(X^2 - 4X + 4) = X(X - 2)^2.$$

Donc les valeurs propres de M sont dans $\{0, 2\}$. Or, $\text{Tr}(M) = 0$, mais $\text{Tr}(M)$ est la somme des valeurs propres (complexes) comptées avec multiplicité. Donc, 2 ne peut pas être valeur propre de M .

Ainsi, la seule valeur propre de M est 0 : M est nilpotente (elle est trigonalisable dans \mathbb{C} donc est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte, donc est nilpotente). Si M ou M^2 est nulle, alors M est nulle car $P(M) = 0$. Sinon, soit p le plus petit entier ≥ 3 tel que $M^p = 0$ (et $M^{p-1} \neq 0_n$). Alors

$$M^{p-2}P(M) = M^{p+1} - 4M^p + 4M^{p-1} = 0_n,$$

donc $M^{p-1} = 0_n$, absurde ! Donc $M = 0_n$.

Exercice 21. CCINP 24. Soient A et B deux matrices carrées de taille n et de même polynôme caractéristique P .

1. Montrer que si P admet n racines distinctes alors A et B sont semblables.

Correction

Si P admet n racines distinctes $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors P est scindé à racines simples et donc A et B sont diagonalisables, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Donc A et B sont toutes deux semblables à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, donc A et B sont semblables.

2. Donner un exemple de deux matrices de même polynôme caractéristique mais qui ne sont pas semblables.

Correction

Il suffit de prendre la matrice nulle et une matrice nilpotente qui n'est pas nulle.

Exercice 22. CCINP 24. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n valeurs propres distinctes de f .

1. Justifier que $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ P \mapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) \end{cases}$ est un isomorphisme.

Correction

Il s'agit d'une question de cours, sur le théorème d'interpolation de Lagrange : cf. votre cours de révisions d'algèbre linéaire !

2. Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h = P(f)$, avec $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que h et f commutent.

Correction

C'est du cours aussi ! On écrit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Alors

$$\begin{aligned} h \circ P(f) &= f \circ \left(\sum_{k=0}^n a_k f^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k f \circ f^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k f^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k f^k \circ f \\ &= \left(\sum_{k=0}^n a_k f^k \right) \circ f = h \circ f. \end{aligned}$$

Donc h et f commutent.

3. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$.

(a) Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g .

Correction

C'est encore du cours ! Soit λ une valeur propre de f , x dans $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \text{Id}_E)$.
Alors

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x),$$

donc $g(x) \in E_\lambda(f)$.

(b) Quelle est la dimension de chaque sous-espace propre de f ? Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g .

Correction

Comme f possède n valeurs propres distinctes, on sait que f est diagonalisable et que chaque sous-espace propre est une droite : en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres de f , on sait que la somme $\bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(f)$ est directe et que

$$n \geq \dim \left(\bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(f) \right) \geq \sum_{i=1}^n 1 = n,$$

donc, finalement, $\dim \left(\bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(f) \right) = n$, donc

$$E = \bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(f),$$

ce qui est le résultat désiré.

Soit maintenant λ une valeur propre de f , x un vecteur propre associé. Comme x est non nul, on en déduit que $E_\lambda(f) = \text{Vect}(x)$.

Mais, par la question précédente, $g(x) \in \text{Vect}(x)$ donc $g(x) = \mu x$ avec $\mu \in \mathbb{R}$, donc x est un vecteur propre de g .

(c) En déduire qu'il existe une base de vecteurs propres commune à f et g .

Correction

En notant $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres distinctes de f et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres associée, on vient de démontrer que \mathcal{B} était une base de E constituée de vecteurs propres de g .

(d) En déduire qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.

Correction

On vient de démontrer que f et g étaient diagonalisables dans la même base \mathcal{B} .

Écrivons alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix},$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts, mais pas nécessairement μ_1, \dots, μ_n .
Par l'isomorphisme établi dans la question 1, il existe un unique polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout i , $P(\lambda_i) = \mu_i$. Ainsi,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f)) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g),$$

donc $P(f) = g$.

4. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ d'une dimension qu'on précisera.

Correction

On a vu dans les questions précédentes que pour tout g dans $\mathcal{L}(E)$, on a l'équivalence

$$g \circ f = f \circ g \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P(f) = g.$$

Donc, si l'on note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f , on sait que

$$\mathcal{C}(f) = \{P(f), P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}.$$

Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ car c'est l'image de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par l'application linéaire

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(f) \end{cases}.$$

On a vu que $\text{Im}(\varphi) = \mathcal{C}(f)$. Il nous suffit donc à déterminer le noyau de φ pour déterminer la dimension de $\mathcal{C}(f)$.

Soit $P \in \ker(\varphi)$. Alors $P(f) = 0$. Donc les valeurs propres de f sont incluses dans les racines de P . Comme f possède n valeurs propres distinctes, on en déduit que P possède (au moins) n racines distinctes. Mais $\deg(P) \leq n-1$ donc P est nul.

Finalement, φ est injective donc, d'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathcal{C}(f)) = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) - \dim(\ker(\varphi)) = n.$$

Exercice 23. CCINP 22. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$

1. Montrer que si P est un polynôme annulateur de A alors les valeurs propres de A sont des racines de P .

Correction

C'est une question de cours.

2. Montrer que $\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Correction

On écrit que $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. Comme A et B n'ont pas de valeur propre en commun, on en déduit que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ne sont pas valeurs propres de B , donc pas racines de χ_B . Alors

$$\det(\chi_A(B)) = \prod_{i=1}^r \det(B - \lambda_i I_n) = \prod_{i=1}^r (-1)^n \chi_B(\lambda_i) \neq 0,$$

donc $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C})$.

3. Montrer que si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AX = XB$, alors $X = 0$.

Correction

Si X vérifie $AX = XB$, alors pour tout k dans \mathbb{N} , $A^k X = X B^k$ donc, pour tout $P(T) = \sum_{i=0}^d a_i T^i$, on a

$$P(A)X = \sum_{i=0}^d a_i A^i X = X \sum_{i=0}^d a_i B^i = X P(B).$$

En particulier, pour $P = \chi_A$, $0_n = X \chi_A(B)$ et, comme $\chi_A(B)$ est inversible, $X = 0_n$.

4. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

Correction

On considère l'application $\varphi : X \mapsto AX - XB$. Cette application est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, injectif par la question précédente, en dimension finie, donc bijectif. Le résultat d'en déduit immédiatement.

Exercice 24. Mines-Ponts 24. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $a_1 < \dots < a_n$ tel que la $i^{\text{ième}}$ ligne de A est :

$$(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{i-1} \quad 0 \quad a_{i+1} \quad \dots \quad a_n)$$

1. Montrer que $\lambda \in \text{sp}(A) \iff \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda + a_i} = 1$.

Correction

Calculons le polynôme caractéristique de A . Soit $x \in \mathbb{K}$. Alors

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \\ -a_1 & x & -a_3 & \dots & -a_n \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -a_1 & \dots & \dots & x & -a_n \\ -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} & x \end{vmatrix}$$

On fait les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_n$ pour tout i et on obtient

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x + a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n - x \\ 0 & x + a_2 & 0 & \cdots & -a_n - x \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x + a_{n-1} & -a_n - x \\ -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} & x \end{vmatrix}$$

On appelle ce déterminant $D(a_1, \dots, a_n)$. Un développement selon la première colonne assure que

$$\begin{aligned} D(a_1, \dots, a_n) &= (x + a_1)D(a_2, \dots, a_n) + (-1)^n a_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_n - x \\ x + a_2 & 0 & \cdots & -a_n - x \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & x + a_{n-1} & -a_n - x \end{vmatrix} \\ &= (x + a_1)D(a_2, \dots, a_n) + (-1)^n a_1 \times (-1)^{n-1+1} (-a_n - x) \times \prod_{k=2}^{n-1} (x + a_k) \\ &= (x + a_1)D(a_2, \dots, a_n) - a_1 \prod_{k=2}^n (x + a_k) \\ &= (x + a_1)(x + a_2)D(a_3, \dots, a_n) - a_2(x + a_1) \prod_{k=3}^n (x + a_k) - a_1 \prod_{k=2}^n (x + a_k) \\ &= \dots \\ &= x \prod_{k=1}^{n-1} (x + a_k) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \prod_{k \neq i} (x + a_k) \\ &= \prod_{k=1}^n (x + a_k) - \sum_{i=1}^n a_i \prod_{k \neq i} (x + a_k) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \chi_A(x) = 0 &\Leftrightarrow \prod_{k=1}^n (x + a_k) - \sum_{i=1}^n a_i \prod_{k \neq i} (x + a_k) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{\sum_{i=1}^n a_i \prod_{k \neq i} (x + a_k)}{\prod_{k=1}^n (x + a_k)} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i + x} = 0, \end{aligned}$$

ce qui est exactement l'équation demandée.

2. En déduire que A est diagonalisable.

Correction

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i + x}.$$

Alors f est définie sur

$$] - \infty, -a_n[\cup] - a_n, -a_{n-1}[\cup \dots \cup] - a_2, -a_1[\cup] - a_1, +\infty[.$$

Elle y est dérivable de dérivée

$$f' : x \mapsto - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(a_i + x)}$$

Comme tous les a_i sont strictement positifs, f' est strictement négative, donc est strictement décroissante sur chaque intervalle sur lequel elle est définie. En particulier, sur $] - a_{i+1}, -a_i[$,

- f est strictement décroissante,
- $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -a_{i+1}^+} +\infty$,
- $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -a_i^-} -\infty$,

donc, par le théorème des valeurs intermédiaires (et sa version strictement monotone), f prend la valeur 1 en exactement un point sur $] - a_{i+1}, -a_i[$, donc A admet exactement une valeur propre dans cet intervalle. Ceci nous donne déjà $n - 1$ valeurs propres de A . Enfin, sur $] - a_1, +\infty[$,

- f est strictement décroissante,
- $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -a_1^+} +\infty$,
- $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$,

donc, par le théorème des valeurs intermédiaires (et sa version strictement monotone), f prend la valeur 1 en exactement un point sur $] - a_1, +\infty[$.

On a donc trouvé n valeurs propres distinctes pour f , donc f est diagonalisable.

Exercice 25. Mines-Ponts 24. Soit $A \in {}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\text{rg}(A) = 2$, $\text{tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0_n$. Montrer que A est diagonalisable.

Correction

Déjà fait à l'exercice 31.

Exercice 26. Mines 17. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie, puis u un isomorphisme de E tel que u^2 est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable.

Correction

Déjà fait à l'exercice 28.

Exercice 27. CCINP 22. Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que si f est diagonalisable alors f^2 aussi.

Correction

Si f est diagonalisable, alors on dispose d'une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^2$ aussi.

2. Montrer que si f est diagonalisable alors $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

Correction

On sait déjà, par le cours que $\text{ker}(f) \subset \text{ker}(f^2)$. Mais si on écrit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 \mathbf{I}_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \mathbf{I}_{n_r} \end{pmatrix},$$

où $\lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont non nulles, alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} 0_{n_1} & & & \\ & \lambda_2^2 \mathbf{I}_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r^2 \mathbf{I}_{n_r} \end{pmatrix},$$

de rang égal au rang de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, et donc le noyau de f^2 est égal à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n_1})$.
Donc $\text{ker}(f^2) = \text{ker}(f)$.

3. Soit λ une valeur propre non nulle de f^2 et μ une racine carrée complexe de λ . Montrer que :
 $\text{Ker}(f^2 - \lambda \text{Id}_E) = \text{Ker}(f - \mu \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \mu \text{Id}_E)$.

Correction

Déjà, on remarque que si $x \in \text{ker}(f - \mu \text{Id}_E)$, alors $f(x) = \mu x$ donc $f^2(x) = \mu^2 x = \lambda x$; de même si $x \in \text{ker}(f + \mu \text{Id}_E)$. Donc $\text{ker}(f - \mu \text{Id}_E)$ et $\text{ker}(f + \mu \text{Id}_E)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\text{ker}(f^2 - \lambda \text{Id}_E)$.

Ensuite, on démontre que $\text{ker}(f^2 - \lambda \text{Id}_E) = \text{ker}(f - \mu \text{Id}_E) \oplus \text{ker}(f + \mu \text{Id}_E)$ par analyse-synthèse. Soit $x \in \text{ker}(f^2 - \lambda \text{Id}_E)$.

Analyse. Soient y dans $\text{ker}(f - \mu \text{Id}_E)$ et z dans $\text{ker}(f + \mu \text{Id}_E)$ tels que $x = y + z$. Alors $f(x) = \mu y - \mu z$ donc, comme $\mu \neq 0$,

$$y = \frac{x + \frac{1}{\mu} f(x)}{2} \text{ et } z = \frac{x - \frac{1}{\mu} f(x)}{2},$$

d'où l'unicité de y et z .

Synthèse. Posons

$$y = \frac{x + \frac{1}{\mu} f(x)}{2} \text{ et } z = \frac{x - \frac{1}{\mu} f(x)}{2},$$

Alors

- déjà, $y + z = x$,
- ensuite,

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{2} \left(f(x) + \frac{1}{\mu} f^2(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(f(x) + \frac{1}{\mu} \lambda x \right) \\ &= \frac{1}{2} (f(x) + \mu x) \text{ car } \mu^2 = \lambda \\ &= \mu y, \end{aligned}$$

donc $y \in \text{ker}(f - \mu \text{Id}_E)$.

- enfin,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \left(f(x) - \frac{1}{\mu} f^2(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(f(x) - \frac{1}{\mu} \lambda x \right) \\ &= \frac{1}{2} (f(x) - \mu x) \text{ car } \mu^2 = \lambda \\ &= -\mu z, \end{aligned}$$

donc $z \in \ker(f + \mu \text{Id}_E)$.

D'où l'existence et la supplémentarité de $\ker(f - \text{Id}_E)$ et $\ker(f + \text{Id}_E)$ dans $\ker(f^2 - \lambda \text{Id}_E)$.

4. Montrer que si f^2 est diagonalisable et inversible, alors f est diagonalisable et inversible.

Correction

Si f^2 est diagonalisable et inversible, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de f^2 , qui sont **non nulles**. Alors on sait que

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \ker(f^2 - \lambda_i \text{Id}_E).$$

Si on note μ_1, \dots, μ_r des racines carrées de $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, alors la question précédente nous assure que

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \ker(f - \mu_i \text{Id}_E) \oplus \ker(f + \mu_i \text{Id}_E),$$

donc E est somme directe des sous-espaces propres de f (quitte à retirer, dans la somme ci-dessus, les sous-espaces propres qui sont réduits à 0). Donc E est diagonalisable.

5. Montrer que si f^2 est diagonalisable, f est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

Correction

On a déjà fait le sens direct.

Pour le sens réciproque, on écrit que si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de f^2 , alors

$$E = \ker(f^2) \oplus \bigoplus_{i=1}^r \ker(f^2 - \lambda_i \text{Id}_E).$$

Si on note μ_1, \dots, μ_r des racines carrées de $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, alors comme, de plus, $\ker(f^2) = \ker(f)$,

$$E = \ker(f) \oplus \bigoplus_{i=1}^r \ker(f - \mu_i \text{Id}_E) \oplus \ker(f + \mu_i \text{Id}_E),$$

donc E est somme directe des sous-espaces propres de f (quitte à retirer, dans la somme ci-dessus, les sous-espaces propres qui sont réduits à 0). Donc E est diagonalisable.

Exercice 28. Centrale 24. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que M^2 est diagonalisable et M inversible. Montrer que M est diagonalisable.

Correction

Comme M^2 est diagonalisable, elle est annihilée par le polynôme

$$P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i),$$

où $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ est le spectre de M^2 . Comme M est inversible, M^2 aussi, donc 0 n'est pas valeur propre de M^2 . Donc $\prod_{i=1}^r (M^2 - \lambda_i I_n) = 0_n$, donc le polynôme $\prod_{i=1}^r (X^2 - \lambda_i)$ annule M . Notons, pour tout i , δ_i une racine de λ_i . On sait que comme $\lambda_i \neq 0$, $\delta_i \neq -\delta_i$ et que si $i \neq j$, $\delta_i \neq \pm \delta_j$, donc

$$Q(X) = \prod_{i=1}^r (X^2 - \lambda_i) = \prod_{i=1}^r (X - \delta_i)(X + \delta_i)$$

est un polynôme scindé à racines simples qui annule M . Donc M est diagonalisable.

2. On suppose qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $Q(M)$ diagonalisable et $Q'(M)$ inversible. On se propose de montrer que M est diagonalisable.

(a) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tel que $P \circ Q(M) = 0_n$.

Correction

Comme $Q(M)$ est diagonalisable, elle est annihilée par un polynôme scindé à racines simples, donc il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(Q(M)) = 0_n$, i.e. $P \circ Q(M) = 0_n$.

(b) Soit β_1, \dots, β_k les racines de P . En considérant les polynômes $(Q(X) - \beta_1), \dots, (Q(X) - \beta_k)$, montrer que toute valeur propre de M est racine simple de $P \circ Q$. Conclure.

Correction

Soit λ une valeur propre de M . Comme $P \circ Q$ annule M , on en déduit que

$$\prod_{i=1}^k (Q(\lambda) - \beta_i) = 0,$$

donc on dispose de j tel que $Q(\lambda) = \beta_j$. Ce j est par ailleurs unique car P est scindé à racines simples. Donc la multiplicité de λ dans $P \circ Q$ est égale à la multiplicité de λ dans $Q(X) - \beta_j$.

Or, $Q'(\lambda) \neq 0$. En effet, $Q'(A)$ est inversible, donc λ n'est pas racine de Q' (sinon on aurait Q factorisable par $X - \lambda$ et donc $Q'(A) = (A - \lambda I_n)B$, non inversible).

Donc λ est racine simple de $Q(X) - \beta_j$, donc de $P \circ Q$.

On en déduit que

$$P \circ Q = R \times \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (X - \lambda),$$

où R est un polynôme qui n'admet aucun λ de $\text{Sp}(M)$ comme racine. Donc $R(M)$ est inversible. Mais $P \circ Q(M) = 0_n$ donc

$$\prod_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (M - \lambda I_n) = 0_n, \text{ donc } M \text{ est diagonalisable.}$$

Exercice 29. Centrale 24. On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et l'on considère $U = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.

1. Soit $R \in \mathbf{R}[X]$. Calculer $R(V)$ et $R(U)$.

Correction

On note $R(X) = \sum_{k=0}^d r_k X^k$. Or, par produit par blocs, on remarque que pour tout k dans \mathbb{N} ,

$$V^k = \begin{pmatrix} A^k & 0_n \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}, \text{ donc } R(V) = \sum_{k=0}^d r_k V^k = \begin{pmatrix} R(A) & 0_n \\ 0_n & R(A) \end{pmatrix}.$$

Ensuite, par produit par blocs,

$$U^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2A^2 \\ 0_n & A^2 \end{pmatrix}, \quad U^3 = \begin{pmatrix} A^3 & 3A^3 \\ 0_n & A^3 \end{pmatrix}, \text{ donc (rec. immédiate) } U^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$$

Donc

$$R(U) = \begin{pmatrix} R(A) & \sum_{k=0}^d k r_k A^k \\ 0_n & R(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(A) & AR'(A) \\ 0_n & R(A) \end{pmatrix}.$$

2. On suppose que U et V sont semblables et que A est diagonalisable.

(a) Montrer qu'il existe un polynôme P scindé à racines simples vérifiant $AP'(A) = 0_n$.

Correction

On sait que A est diagonalisable, donc elle est annulée par un polynôme scindé à racines simples P . Donc $P(A) = 0_n$, donc $P(U) = 0_{2n}$. Mais comme on a supposé U et V semblables, on en déduit que $P(V) = 0_{2n}$, d'où $AP'(A) = 0_n$.

(b) Montrer que $A = 0_n$.

Correction

Comme $P(A) = 0$, les valeurs propres de A sont incluses dans les racines du polynôme P . On écrit $P(X) = \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)$.

Mais si on écrit $P'(X) = \prod_{i=1}^{d-1} (X - \mu_i)$ (avec les μ_i **éventuellement** complexes; un peu d'analyse et de théorème de Rolle nous permettent de nous convaincre que les racines de P' sont en fait réelles), on sait, comme les racines de P sont simples, que les racines de P' ne sont pas racines de P donc ne sont pas valeurs propres de A . Ainsi, pour tout i , $A - \mu_i I_n$ est inversible, donc

$$P'(A) = \prod_{i=1}^{d-1} (A - \mu_i I_n) \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Donc, comme $P'(A)$ est inversible et $AP'(A) = 0_n$, on en déduit que $A = 0_n$.

Exercice 30. Navale 2022. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $M^5 + M + I_3 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction

On va déjà chercher à diagonaliser A , pour ramener l'équation précédente à des matrices diagonales.

Soit $x \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ -2 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} \\ &= (x-3) \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (x-3)(x-1)(x+1), \end{aligned}$$

donc A possède 3 valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable, on dispose de P (que l'on

ne va pas chercher à déterminer là) telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Analyse. Soit M une solution de l'équation. Notons $N = P^{-1}MP$. Alors

$$M^5 + M + I_3 = P(N^5 + N + I_3)P^{-1},$$

donc, comme $A = PDP^{-1}$, on en déduit que

$$N^5 + N + I_3 = D.$$

Mais on remarque que

$$ND = N(N^5 + N + I_3) = N^6 + N^2 + N = (N^5 + N + I_3)N = DN,$$

donc N commute avec D . En écrivant l'équation $ND = DN$, on remarque qu'alors N est nécessairement diagonale : $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. L'équation se réécrit simplement

$$\begin{pmatrix} a^5 + a + 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^5 + b + 1 & 0 \\ 0 & 0 & c^5 + c + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

L'équation en a devient $a^5 + a + 2 = 0$. Or, -1 est racine évidente de $X^5 + X + 2$ et si on pose $f : x \mapsto x^5 + x + 2$, $f' : x \mapsto 5x^4 + 1$, strictement positive \mathbb{R} , donc f n'a pas d'autres racines réelles : la seule solution possible est $a = -1$.

L'équation en b devient $b^5 + b + 1 = 1$, i.e. $b(b^4 + 1) = 0$; la seule solution réelle possible est $b = 0$.

L'équation en c devient $c^5 + c + 1 = 3$, i.e. $c^5 + c - 2 = 0$. Une solution évidente est 1, et, par la même étude de fonction que précédemment, il n'y a pas d'autre solution réelle.

Ainsi, nécessairement, $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si on voulait avoir exactement la solution M , il faudrait calculer P . Plutôt que de refaire encore un système linéaire, je vais utiliser python

```
19 import numpy as np
20 import numpy.linalg as alg
21
22 A = [[1, 0, -2],[2, -1, -2],[0, 0, 3]]
23 vp,VP = alg.eig(A)
```

On obtient alors

```
24 >>> vp
25 array([-1.,  1.,  3.])
26
27 >>> VP
28 array([[ 0.          ,  0.70710678, -0.57735027],
29        [ 1.          ,  0.70710678, -0.57735027],
30        [ 0.          ,  0.          ,  0.57735027]])
```

On lit en colonne les vecteurs propres :

- pour la valeur propre -1 , $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- pour la valeur propre 1, $\begin{pmatrix} 0.70710678 \\ 0.70710678 \\ 0 \end{pmatrix}$: c'est immonde, on va prendre un vecteur plus simple, colinéaire à celui-ci, i.e. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- pour la valeur propre 3, $\begin{pmatrix} -0.57735027 \\ -0.57735027 \\ 0.57735027 \end{pmatrix}$: c'est immonde, on va prendre un vecteur plus

simple, colinéaire à celui-ci, i.e. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$!

Ainsi, on va prendre $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On re-pythonne

```
31 P = [[0, 1, 1],[1, 1, 1],[0, 0, -1]]
32 Q = alg.inv(P)
```

On obtient

```
33 >>> Q
34 array([[ -1.,  1.,  0.],
35         [ 1.,  0.,  1.],
36         [-0., -0., -1.]])
```

Ainsi, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et

```
37 N = np.diag([-1,0,1])
38 M = np.dot(P,np.dot(N,Q))
39
40 B = alg.matrix_power(M,5)+M + np.eye(3)
```

On trouve

```
41 >>> M
42 array([[ 0.,  0., -1.],
43         [ 1., -1., -1.],
44         [ 0.,  0.,  1.]])
45
46 >>> B
47 array([[ 1.,  0., -2.],
48         [ 2., -1., -2.],
49         [ 0.,  0.,  3.]])
```

D'où l'unique solution M !

Exercice 31. Navale 2022. Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $\text{tr}(A) = 0$; $\text{rg}(A) = 2$ et $A^n \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable.

Correction

On sait que A possède 0 comme valeur propre, et que $E_0(A)$ est de dimension $n - 2$.

Le polynôme caractéristique de A s'écrit donc $\chi_A(X) = X^{n-2}(X - a)(X - b)$ avec a et b à déterminer.

Si on avait $a = b = 0$, comme, par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$, on aurait $A^n = 0$.

Donc a ou b est non nul. Mais comme $\text{Tr}(A) = 0$, $0 + 0 + \dots + 0 + a + b = 0$ donc $b = -a$.

Donc a et b sont non nuls et sont distincts.

Donc a et b sont deux valeurs propres distinctes de A , et leurs espaces propres associés sont des droites. Donc, comme $n - 2 + 1 + 1 = n$, on en déduit que A est diagonalisable.

4 Trigonalisation

Exercice 32. CCINP 24. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de M .

Correction

Soit $x \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned} \chi_M(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & -4 & 2 \\ 0 & x-6 & 3 \\ 1 & -4 & x \end{vmatrix} \\ &= (x-1) \begin{vmatrix} x-6 & 3 \\ -4 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ x-6 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)(x^2 - 6x + 12) + (-12 - 2(x-6)) \\ &= x^3 - 6x^2 + 12x - x^2 + 6x - 12 - 2x \\ &= x^3 - 7x^2 + 16x - 12. \end{aligned}$$

On voit que 2 est racine de ce polynôme, donc

$$\chi_M(x) = (x-2)(x^2 - 5x + 6) = (x-2)^2(x-3).$$

Donc M possède deux valeurs propres, 2 et 3.

2. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de M .

Correction

On a vu que 2 et 3 étaient valeurs propres.

- **pour la valeur propre 2**, on peut résoudre un système linéaire ou regarder une matrice :

$$M - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

matrice qui est clairement de rang 2 (deux lignes identiques, la troisième qui n'est pas proportionnelle). Donc $\dim(E_2(M)) = 1$. De plus, on voit que $4C_1 + 3C_2 + 4C_3 =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in E_2(M). \text{ Donc } E_2(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right).$$

- **pour la valeur propre 3**, on remarque que

$$M - 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

et on remarque que $C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_3(M)$. Comme

$\dim(E_3(M)) \leq 1$, on en déduit que $E_3(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

3. M est-elle diagonalisable ?

Correction

Comme $\dim(E_2(M)) = 1 < 2$, M n'est pas diagonalisable.

4. M est-elle trigonalisable ? Si oui, trouver une matrice triangulaire supérieure à laquelle M est semblable.

Correction

Le polynôme caractéristique de M est scindé sur \mathbb{R} donc M est trigonalisable. On a

déjà une famille $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ de vecteurs propres. Dans une base complétée

(e_1, e_2, e_3) , la matrice sera donc

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

MAIS, comme $\chi_M(X) = (X - 3)(X - 2)^2$, le coefficient en bas à droite sera nécessairement un 2, et ce quel que soit le troisième vecteur. On va prendre un vecteur de la

base canonique, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On remarque qu'il n'appartient pas à $\text{Vect}(e_1, e_2)$ car ces deux

vecteurs sont dans le plan d'équation $x = z$.

On calcule

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2e_3 + 3e_1 - e_2$$

Ainsi, si $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $M = PTP^{-1}$, avec

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} x' = x + 4y - 2z \\ y' = 6y - 3z \\ z' = -x + 4y \end{cases}$$

Correction

Analyse. Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ une solution du système. Alors le système est $X'(t) = MX(t)$, i.e.

$$X'(t) = PTP^{-1}X(t) \text{ ou encore } P^{-1}X'(t) = TP^{-1}X(t),$$

donc, en posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, $Y'(t) = TY(t)$. On note $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, et alors

$$\begin{cases} u'(t) = 3u(t) + 3w(t) \\ v'(t) = 2v(t) - w(t) \\ w'(t) = 2w(t). \end{cases}$$

Donc on dispose de $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $w(t) = \gamma e^{2t}$. Mais alors

$$v'(t) = 2v(t) + \gamma e^{2t}.$$

Une solution particulière de l'équation est $t \mapsto \gamma t e^{2t}$ (on l'a trouvée par une variation de la constante), donc on dispose de $\beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout t , $v(t) = \beta e^{2t} + \gamma t e^{2t}$.

Enfin,

$$u'(t) - 3u(t) = 3\gamma e^{2t}$$

Une solution particulière de l'équation est $t \mapsto -3\gamma e^{2t}$ donc on dispose de α tel que

$$u(t) = \alpha e^{3t} - 3\gamma e^{2t}.$$

Ainsi

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{3t} - 3\gamma e^{2t} \\ \beta e^{2t} + \gamma t e^{2t} \\ \gamma e^{2t} \end{pmatrix}.$$

donc

$$\begin{aligned} X(t) &= PY(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{3t} - 3\gamma e^{2t} \\ \beta e^{2t} + \gamma t e^{2t} \\ \gamma e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha e^{3t} + 4\beta e^{2t} + \gamma(t-2)e^{2t} \\ \alpha e^{3t} - 3\beta e^{2t} + \gamma(t-3)e^{2t} \\ \alpha e^{3t} + 4\beta e^{2t} + \gamma(t-3)e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous ne ferons pas la **synthèse**...

Exercice 33. Mines-Telecom 16. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le spectre de A .

Correction

On calcule le polynôme caractéristique de A . Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-6 & 4 & 3 \\ -4 & x+2 & 3 \\ -3 & 3 & x+1 \end{vmatrix} \\ &=_{C_1 \leftarrow C_1 + C_2} \begin{vmatrix} x-2 & 4 & 3 \\ x-2 & x+2 & 3 \\ 0 & 3 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (x-2) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & x+2 & 3 \\ 0 & 3 & x+1 \end{vmatrix} \\ &=_{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} (x-2) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 3 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (x-2) \begin{vmatrix} x-2 & 0 \\ 3 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)^2(x+1). \end{aligned}$$

Donc $\text{Sp}(A) = \{-1, 2\}$.

2. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

Correction

On remarque que

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} - 2I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 \\ 4 & -4 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$

et cette matrice est de rang 1 (les deux premières lignes sont égales mais la dernière ne leur est pas proportionnelle). Donc $\dim(E_2(A)) = 1 < 2$, donc A n'est pas diagonalisable.

3. Expliciter une base (u, v, w) de \mathbb{R}^3 telle que u et v soient des vecteurs propres de A .

Correction

Déjà, comme $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 \\ 4 & -4 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, on remarque que $C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur du noyau de $A - 2I_3$, donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2..

Ensuite,

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ 4 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

matrice de rang 1. Comme $C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1 .

Enfin, on remarque que $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \text{Vect}(u, v)$ car u, v sont dans le plan d'équation $x = y$. Donc (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 telle que u et v soient des vecteurs propres de A .

4. A est-elle trigonalisable ?

Correction

La matrice A est alors trigonalisable car dans la base (u, v, w) , la matrice de f_A (l'endomorphisme canoniquement associé à A) est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

mais, comme le polynôme caractéristique de A est $(X + 1)(X - 2)^2$, nécessairement le coefficient en bas à droite est un 2. Bref, A est bien trigonalisable.

Exercice 34. Navale 2019. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que 1 est la seule valeur propre de M si et seulement si : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{tr}(M^k) = n$.

Correction

Si 1 est la seule valeur propre de M , alors, M étant trigonalisable, on dispose de P inversible tel que

$$M = P \begin{pmatrix} 1 & & (*) \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

donc, pour tout k dans \mathbb{N} , $M^k = P \begin{pmatrix} 1^k & & (*) \\ & \ddots & \\ & & 1^k \end{pmatrix} P^{-1}$, donc $\text{Tr}(M^k) = n$.

Réciproquement, si pour tout k dans \mathbb{N} , $\text{Tr}(M^k) = n$, en notant $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ les valeurs propres distinctes de M , (m_1, \dots, m_r) leurs multiplicités, en choisissant de noter $\lambda_1 = 1$ (même si 1 n'est pas valeur propre, alors on pose $m_1 = 0$) alors pour tout k dans \mathbb{N} ,

$$\sum_{i=1}^r m_i \lambda_i^k = n,$$

ou encore

$$(m_1 - n)\lambda_1^k + \sum_{i=2}^r m_i \lambda_i^k = 0,$$

i.e., si on pose

$$X = \begin{pmatrix} m_1 - n \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix},$$

qui est inversible car c'est une matrice de Vandermonde et $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ sont deux à deux distincts.

On en déduit que $m_1 - n = m_2 = \dots = m_r = 0$, donc $m_1 = n$ et 1 est la seule valeur propre !

Exercice 35. CCINP 22. Soit a l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que a est trigonalisable mais pas diagonalisable.

Correction

On calcule le polynôme caractéristique de a . Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \chi_a(x) &= \begin{vmatrix} x-3 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & 0 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\ &=_{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{vmatrix} x-3 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & 0 \\ 0 & x-2 & x-2 \end{vmatrix} \\ &=_{C_2 \leftarrow C_2 - C_3} \begin{vmatrix} x-3 & 1 & -2 \\ -1 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= (x-2) \begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)((x-3)(x-1) + 1) \\ &= (x-2)(x^2 - 4x + 3 + 1) \\ &= (x-2)^3. \end{aligned}$$

Donc χ_a est scindé, donc a est trigonalisable, mais, comme la seule valeur propre de a est 2 et $a \neq 2\text{Id}_E$, donc a n'est pas diagonalisable !

2. Déterminer les droites stables par a .

Correction

La matrice de $a - 2\text{Id}_E$ dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang supérieur ou égal à 2 car il y a deux lignes non proportionnelles,

mais elle n'est pas de rang 3 car $C_1 + C_2 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a possède donc une seule droite propre, c'est $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

3. Montrer que si a' est la restriction de a à un sous-espace stable par a , alors $\chi_{a'}$ divise χ_a .

Correction

Soit F un sous-espace stable par a et G un supplémentaire de F . Alors dans une base adaptée à la décomposition $F \oplus G = E$, la matrice de a est

$$\begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

et A' est la matrice de a' ! Alors $\chi_a(x) = \det(xI_{n_1} - A')\det(xI_{n_2} - C) = \chi_{a'}(x)\det(xI_{n_2} - C)$
donc $\chi_{a'}$ divise χ_a .

4. Déterminer les plans stables par a .

Correction

Soit P un plan stable par a . Soit a' l'endomorphisme induit par a sur P . Alors $\chi_{a'} = (X - 2)^2$. Ceci signifie que pour tout $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $(A - 2I_3)^2 U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Or,

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Donc $(A - 2I_3)^2 U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $U \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(u, v)$.

Donc nécessairement, $P \subset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Réciproquement, on remarque que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = u + v \text{ et } A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -u - v.$$

Donc le seul plan stable par A est $P = \text{Vect}(u, v)$.