TD 08
Réduction

1 Vecteurs propres, valeurs propres, aspects géométriques

Exercice 1. *CCINP 24*. Soit φ l'application qui au polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P par $X^4 - 1$.

1. Prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donnez A la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. A est-elle diagonalisable ? (on pourra calculer A^2)
3. Donner le spectre de φ.
4. Donnez les sous-espaces propres de φ.
5. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donnez son inverse.
6. L'application φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 2. *Mines-Telecom 24*. Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$.
Soit $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto XB - BX$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad f(A^k) = kA^k$.
3. En déduire que A est nilpotente.

Exercice 3. *Mines-Telecom 24*. Soit $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A + \mathrm{tr}(A)\mathrm{I}_n$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Trouver les valeurs propres de f.
3. f est-elle diagonalisable ?
4. Donner $\mathrm{tr}(f)$ et $\det(f)$.
5. f est-elle un automorphisme ?
6. Lien entre Id_E, f et f^2 ?
7. Donner f^{-1}.

Exercice 4. *Mines-Telecom 24*. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et soit f définie par : $\forall X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f(X) = AX$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$
3. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Donner le spectre de f.
5. Donner les espaces propres associés.

Exercice 5. *CCINP 18*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace non nulle.
On définit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto (\mathrm{tr}(A))M - (\mathrm{tr}(M))A$.

1. Justifier brièvement que f est un endomorphisme.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Déterminer les sous-espaces propres de f. f est-il diagonalisable ?
4. Calculer $f \circ f(M)$, et en déduire d'une seconde façon que f est diagonalisable.

Exercice 6. *CCINP 2019*. Soit E l'espace des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose : $\phi(f)(0) = f(0)$ et $\phi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ si $x \neq 0$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme de E.
2. Montrer que 0 n'est pas une valeur propre de ϕ.
3. Montrer que 1 est une valeur propre de ϕ et trouver l'espace propre associé.
4. Déterminer les autres valeurs propres.

Exercice 7. *Centrale 22*. On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients sont positifs et vérifient : $\forall j \in [\![1,n]\!], \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_{i,j} = 1$.

1. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est stable par multiplication.
2. Montrer que 1 est valeur propre de toute matrice stochastique.
3. Montrer que toute valeur propre d'une matrice stochastique est de module inférieur ou égal à 1.
4. Montrer que si X est propre pour une matrice stochastique, pour une valeur propre de module 1, alors le vecteur dont les coordonnées sont les modules de celles de X est propre pour 1 .

Exercice 8. *Centrale 19*. Soit n un entier naturel. On considère la matrice $A_{n+1} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $a_{j-1,j} = j-1$, $a_{j+1,j} = n+1-j$ pour tout j et dont tous les autres coefficients sont nuls.

1. Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie A_{n+1}.
2. Déterminer avec Python les valeurs propres de A_{n+1}. Que peut-on conjecturer ?
3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ canoniquement associé à la matrice A_{n+1}. Montrer qu'il existe un polynôme Q ne dépendant pas de n tel que pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = QP' + nXP$.
4. En déduire les éléments propres de u.
5. La matrice A_{n+1} est-elle diagonalisable ?

2 Utilisation de polynômes : diagonalisation concrète

Exercice 9. *CCINP 24*. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est diagonalisable ; déterminer son spectre et ses sous-espaces propres.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $R(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$. Écrire $R(a,b)$ en fonction de I_3, M, a et b. Montrer que $R(a,b)$ est diagonalisable. Déterminer le spectre de $R(a,b)$.

Exercice 10. *Mines-Telecom 24*. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. On note I et S ses valeurs propres avec $\mathrm{I} \leqslant S$.

1. Donner les expressions de I et S.
2. Calculer la probabilité que M soit inversible.
3. Calculer la covariance de I et de S. Les variables I et S sont-elles indépendantes ?

Exercice 11. *Mines-Telecom 24*. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M_{i,j} = \begin{cases} (-1)^i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Caractériser les éléments diagonaux de M^2.

On suppose maintenant que n est pair.

3. Déterminer la trace de M, puis la trace de M^2.
4. Montrer que 0 et (-2) sont valeurs propres de M, et montrer une inégalité entre les dimensions de leurs sous-espaces propres et $p-1$, avec p tel que $n = 2p$.
5. Déterminer $\mathrm{sp}(M)$.
6. Questions supplémentaires posées par le jury : Que pouvez-vous dire de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M ? Dites tout ce que vous savez sur le rang d'une matrice.

Exercice 12. *Mines-Telecom 24*. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$

1. Trouver une matrice P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Soit M une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels. Montrer que si M vérifie $M^3+2M = A$ alors les matrices D et $Q = P^{-1}MP$ commutent. En déduire que Q est diagonale.
3. Trouver toutes les matrices M vérifiant $M^3 + 2M = A$.

Exercice 13. *Centrale 24*.

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un C-espace vectoriel E de dimension n. On suppose que u possède exactement 2 valeurs propres distinctes, λ_1 et λ_2. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si il existe deux projecteurs p_1 et p_2 tels que $u = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ et $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}_E$.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Montrer que $A = \begin{pmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+b \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 14. *Mines-Telecom 22*. Diagonaliser $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ puis résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = 2x + y + z \\ z' = -2x - y - z \end{cases}$

Exercice 15. *Mines-Telecom 24*. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ avec$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Trouver un polynôme annulateur de M de degré 3.
2. M est-elle inversible ?
3. M est-elle diagonalisable ?
4. Montrer que les valeurs propres de M^2 sont négatives ou nulles.

Exercice 16. *Mines 22*. Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & (0) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

3 Utilisation de polynômes : exercices plus théoriques

Exercice 17. *Mines-Telecom 24*. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = 4A^2$. On suppose que 2 et -2 sont valeurs propres de A. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 18. *CCINP 24*. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui vérifie $\operatorname{tr}(M) = 0$ et $M^3 - 4M = 0$.

1. Démontrer que les valeurs propres de M sont racines du polynôme $P = X^3 - 4X$.
2. Caractériser les matrices vérifiant les conditions de l'énoncé.

Exercice 19. *CCINP 24*. Soit $n \geqslant 2$. On considère $u : M \in: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto aM + bM^\top$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de u.
3. Trouver les valeurs propres de u.
4. u est-il diagonalisable ?

Exercice 20. *Mines-Telecom 24*. On s'intéresse aux matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient $(*)$ $\begin{cases} M^3 - 4M^2 + 4M = 0 \\ \operatorname{tr}(M) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que si M vérifie (*), alors les valeurs propres de M sont racines du polynôme $P = X^3 - 4X^2 + 4X$.
2. Exprimer les matrices M vérifiant (*).

Exercice 21. *CCINP 24*. Soient A et B deux matrices carrées de taille n et de même polynôme caractéristique P.

1. Montrer que si P admet n racines distinctes alors A et B sont semblables.
2. Donner un exemple de deux matrices de même polynôme caractéristique mais qui ne sont pas semblables.

Exercice 22. *CCINP 24*. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n n$ valeurs propres distinctes de f.

1. Justifier que $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n \\ \quad P \mapsto (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
2. Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ tel que $h = P(f)$, avec $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que h et f commutent.
3. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$.
   (a) Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g.
   (b) Quelle est la dimension de chaque sous-espace propre de f ? Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
   (c) En déduire qu'il existe une base de vecteurs propres commune à f et g.
   (d) En déduire qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.
4. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ d'une dimension qu'on précisera.

Exercice 23. *CCINP 22*. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(B) = \emptyset$

1. Montrer que si P est un polynôme annulateur de A alors les valeurs propres de A sont des racines de P.
2. Montrer que $\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
3. Montrer que si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AX = XB$, alors $X = 0$.
4. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

Exercice 24. *Mines-Ponts 24*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $a_1 < \cdots < a_n$ tel que la $i^{\text{ième}}$ ligne de A est :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & 0 & a_{i+1} & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\lambda \in \mathrm{sp}(A) \Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda + a_i} = 1$.
2. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 25. *Mines-Ponts 24*. Soit $A \in {}_n(\mathbf{C})$. On suppose que $\mathrm{rg}(A) = 2, \mathrm{tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0_n$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 26. *Mines 17*. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, puis u un isomorphisme de E tel que u^2 est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 27. *CCINP 22*. Soit f un endomorphisme d'un C-espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que si f est diagonalisable alors f^2 aussi.
2. Montrer que si f est diagonalisable alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.
3. Soit λ une valeur propre non nulle de f^2 et μ une racine carrée complexe de λ. Montrer que : $\mathrm{Ker}\left(f^2 - \lambda\,\mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{Ker}\left(f - \mu\,\mathrm{Id}_E\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(f + \mu \mathrm{Id}_E\right)$.
4. Montrer que si f^2 est diagonalisable et inversible, alors f est diagonalisable et inversible.
5. Montrer que si f^2 est diagonalisable, f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.

Exercice 28. *Centrale 24*. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que M^2 est diagonalisable et M inversible. Montrer que M est diagonalisable.
2. On suppose qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $Q(M)$ diagonalisable et $Q'(M)$ inversible. On se propose de montrer que M est diagonalisable.
   (a) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tel que $P \circ Q(M) = 0_n$.
   (b) Soit $\beta_1, \ldots, \beta_k$ les racines de P. En considérant les polynômes $\left(Q(X) - \beta_1\right), \ldots, \left(Q(X) - \beta_n\right)$, montrer que toute valeur propre de M est racine simple de $P \circ Q$. Conclure.

Exercice 29. *Centrale 24*. On se donne $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et l'on considère $U = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.

1. Soit $R \in \mathbf{R}[X]$. Calculer $R(V)$ et $R(U)$.
2. On suppose que U et V sont semblables et que A est diagonalisable.
   (a) Montrer qu'il existe un polynôme P scindé à racines simples vérifiant $AP'(A) = 0_n$.
   (b) Montrer que $A = 0_n$.

Exercice 30. *Navale 2022*. Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $M^5 + M + \mathrm{I}_3 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 31. *Navale 2022*. Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $\mathrm{tr}(A) = 0; \mathrm{rg}(A) = 2$ et $A^n \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable.

4 Trigonalisation

Exercice 32. *CCINP 24*. Soit $M = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de M.
2. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de M.
3. M est-elle diagonalisable ?
4. M est-elle trigonalisable ? Si oui, trouver une matrice traiangulaire supérieure à laquelle M est semblable.
5. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x' &= 5x + 4y - 2Z \\ y' &= 3x + 4y + z \\ z' &= 3x + 2y \end{cases}$

Exercice 33. *Mines-Telecom 16*. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le spectre de A.
2. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
3. Expliciter une base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ telle que u et v soient des vecteurs propres de A.
4. A est-elle trigonalisable ?

Exercice 34. *Navale 2019*. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que 1 est la seule valeur propre de M si et seulement si : pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \operatorname{tr}\left(M^k\right) = n$.

Exercice 35. *CCINP 22*. Soit a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que a est trigonalisable mais pas diagonalisable.
2. Déterminer les droites stables par a.
3. Montrer que si a' est la restriction de a à un sous-espace stable par a, alors $\chi_{a'}$ divise χ_a.
4. Déterminer les plans stables par a.