26/11

TD 07 - Suites et séries de fonctions

exercice 13

1) Déjà, f_n est définie sur $\mathbb{R}$

→ CVS de f:
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{\frac{x}{(n+1)^{x+1}}}{\frac{x}{n^{x+1}}} = \frac{n^{x+1}}{(n+1)^{x+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(x+1)} \longrightarrow 1$$

⟹ d'Alembert ne marche pas

- si $x > 0$:

$\frac{x}{n^{x+1}}$ tg d'une series de Riemann CV

donc on a CVS de la série de fonction $\sum f_n$

- si $x = 0$:

$f_n(0) = 0$ donc la série de f° $\sum f_n$ CVS

- si $x < 0$:

$\frac{x}{n^{x+1}}$ est le tg d'une série de Riemann DV
donc $f(x)$ n'est pas définie

donc f est définie sur $[0, +\infty[$

2) Soit $(a,b) \in (]0,+\infty[)^2$
on regarde la $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$,

Soit $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|\frac{x}{n^{x+1}}\right| \leqslant \left|\frac{b}{e^{(a+1)\ln(n)}}\right| \leqslant \left|\frac{b}{n^{a+1}}\right|$$

$\|f_n\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \left|\frac{b}{n^{a+1}}\right|$ par comparaison avec le tg d'une série CV,

La série numérique $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty^{[a,b]}$ converge

donc la série de f° $\sum f_n$ CVN
donc CVU

donc f est continue sur $[a,b]$ donc sur $]0,+\infty[$

→ continuité de f en 0 ?

comme $f(0)=0$, on cherche $\lim\limits_{x\to 0^+}(f(x))$

soit $x>0$: $t \longmapsto \frac{x}{t^{x+1}}$ decroissante sur $[n, n+1]$

donc $\forall t \in [n, n+1]$, $\frac{x}{(n+1)^{x+1}} \leq \frac{x}{t^{x+1}} \leq \frac{x}{n^{x+1}}$

on intègre entre n et $n+1$

donc $\frac{x}{(n+1)^{x+1}} \leq \int_n^{n+1} \frac{x}{t^{x+1}}\,dt \leq \frac{x}{n^{x+1}}$

donc on somme pour n allant de 1 à $+\infty$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(n+1)^{x+1}}}_{=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x}{n^{x+1}} = f(x)-x} \leq \int_1^{+\infty} \frac{x}{t^{x+1}} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^{x+1}}}_{f(x)}$$

~~de plus,~~

de plus, $\int_1^{+\infty} \frac{x}{t^{x+1}}\,dt = \left[-x\frac{t^{-(x+1)+1}}{x}\right]_1^{+\infty}$

$= \left[-t^{-x}\right]_1^{+\infty}$

$=1$

donc $1 \leq f(x) \leq x+1$

donc, par encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$

donc f n'est pas $\mathcal{C}^0$ en 0

donc f est continue sur $]0,+\infty[$

exercice 5

1) On montre, par recurrence sur $n \in \mathbb{N}$,

P_n : " $p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$ "

initialisation :

Soit $x \in [0,1]$, $p_0(x) = 0 \leq \underbrace{0 + \frac{1}{2}(x - 0^2)}_{p_1(x)} \leq \sqrt{x}$

on a bien $\frac{x}{2} \leq \sqrt{x}$ car $\frac{x}{2} \leq x \leq \sqrt{x}$ d'où P_0

hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tq P_n,

Alors $p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$

On mq $p_{n+1}(x) \leq p_{n+2}(x) \leq \sqrt{x}$

On a $0 \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$

donc $p_{n+1}(x)^2 \leq x$

donc $p_{n+2}(x) = p_{n+1}(x) + \frac{1}{2}\left(x - p_{n+1}^2(x)\right)$

$\geq p_{n+1}(x)$

On a les equivalences

$\sqrt{x} \geq p_{n+2}(x)$

$\iff \sqrt{x} \geq p_{n+1}(x) + \underbrace{\frac{1}{2}\left(x - p_{n+1}(x)^2\right)}_{\geq 0}$

$\iff \sqrt{x} - p_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(x - p_{n+1}(x)^2\right) \cancel{\frac{1}{2}(\sqrt{x}/p_n}$

$= \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{x} - p_{n+1}(x)\right)\left(\sqrt{x} + p_{n+1}(x)\right)\right)$

$\iff p_{n+1}(x) = \sqrt{x}$ $\cancel{\frac{1}{2}}$

ou $1 \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + p_{n+1}(x)\right)$

Or $\left(p_{n+1}(x) + \sqrt{x}\right)\frac{1}{2} \leq \sqrt{x} \leq 1$

La dernière proposition est vraie

Donc l'~~hyp~~ $\sqrt{x} \geq p_{n+2}(x)$

D'où l'hérédité et le résultat