TD 07

exercice 5 (suite)

$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - p_n^2(x))$ $\forall x \in [0,1]$

1) déjà faite (par récurrence) $p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$

2) déjà faite $p_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{x}$ ($\nearrow$ + majorée)

3) Mq « $0 \leq \sqrt{x} - p_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2$ » : P_n

on le montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

initialisation : $\sqrt{x} - 0 \geq 0$ et $\sqrt{x} \underset{(=)}{\leq} \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^0$

D'où P_0

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tq P_n, alors $\sqrt{x} - p_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$

$\cancel{\sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} - p_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - \left(p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n^2(x))\right) \\
&= \sqrt{x} - p_n(x) - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x))(\sqrt{x} - p_n(x)) \\
&= (\sqrt{x} - p_n(x))\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x))\right) \\
&\leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x))\right)
\end{aligned}$$

on a les équivalences

$$1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x)) \leq 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$\iff \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x)) \geq \frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$\iff \sqrt{x} + \underbrace{p_n(x)}_{\geq 0} \geq \sqrt{x}$$

La dernière proposition est vraie

Donc $1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x)) \leq 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}$

D'où l'hérédité et le résultat

Donc, $\forall x \in [0,1]$,

$|\sqrt{x} - p_n(x)| \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$

Posons $g_n : x \longmapsto \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right.$

On étudie les variations de g_n

g_n est dérivable et $\forall x \in [0,1]$,

$$g_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n + \sqrt{x}\ n \times \frac{-1}{4\sqrt{x}}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{\sqrt{x}\,n}{2}\right)$$

on a les equivalences

$$n - \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{\sqrt{x}\,n}{2} \geqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{x}\,\frac{(1+n)}{2} \leqslant 1$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{x} \leqslant \frac{2}{1+n}$$

$$\Longleftrightarrow x \leqslant \frac{4}{(1+n)^2} \quad \text{car } x \in [0,1]$$

g_n atteint son max en $x_{max} = \frac{4}{(1+n)^2}$

$$\|g_n\|_\infty^{[0,1]} = \frac{2}{1+n}\left(1 - \frac{1}{1+n}\right)^n$$

$$= \frac{2}{1+n}\, e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{1+n}\right)}$$

$$* \quad n \ln\left(1 - \frac{1}{1+n}\right) = n \ln\left(\frac{n}{1+n}\right)$$

$$= -n \ln\left(\frac{1+n}{n}\right)$$

$$= -n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$$

Donc $e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$

Donc $\|g_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{ne} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $\|f - p_n\|_\infty^{[0,1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

D'où la CVU de p_n vers f sur $[0,1]$