TD08

exercice 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $f : M \longmapsto Tr(A)\,M - Tr(M)\,A$

1) pour vous $\triangle$ f à valeur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

2) Analyse : Soit $M \in \ker(f)$

Donc $f(M) = 0$ donc $Tr(A)\,M = Tr(M)\,A$

donc $M = \dfrac{Tr(M)}{Tr(A)}\,A$

$M \in Vect(A)$

Synthèse : Posons $M \in Vect(A)$

on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $M = \lambda A$

donc $f(M) = Tr(A)\,\lambda A - \lambda\,Tr(A)\,A = 0$

donc $\boxed{\ker(f) = Vect(A)}$

(Analyse :) Soit $M \in Im(f)$

On dispose de $R \in M_n(\mathbb{C})$ tq $M = Tr(A)R - Tr(R)A$

Donc $Tr(M) = 0$

Donc $Im(f) \subset \{\underbrace{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ Tr(M) = 0}_{\dim = n^2 - 1}\}$

Par le thm du rang, $\dim(Im(f)) = n^2 - 1$

Donc $\boxed{Im(f) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ Tr(M) = 0\}}$

- Déjà, $\ker(f)$ est l'espace propre associé à la valeur 0, de dimension 1
- Ensuite, si $M \in Im(f)$

Alors $f(M) = Tr(A)\,M - Tr(M)\,A$

$f(M) = Tr(A)\,M$

Donc $Tr(A)$ est une v.p. differente de 0

De plus, $\mathrm{Im}(f) \subset E_{Tr(A)}(f)$

Donc, $\dim(E_{Tr(A)}(f)) \geqslant n^2 - 1$

Or $E_0(f)$ et $E_{Tr(A)}(f)$ sont en somme directe

et $\dim(E_0(f)) + \dim(E_{Tr(A)}(f)) \geqslant n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$

$n^2 \geqslant \dim(E_0(f) \oplus E_{Tr(A)}(f))$

Donc $E_0(f) \oplus E_{Tr(A)}(f) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

donc f est diagonalisable

4) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$f \circ f(M) = Tr(A) f(M) - Tr(f(M)) A$

$f(f(M)) = Tr(A) f(M)$

Donc $f \circ f = Tr(A) f$

en posang $g = \dfrac{f}{Tr(A)}$

Alors $g \circ g = g$ donc g est un projecteur

donc g est diagonalisable, de vp 0 et 1

Donc $f = Tr(A) g$ est diagonalisable de vp 0 et $Tr(A)$