TD07 - CORRECTION

Exercice 7 :

Soit $S(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$

1) $D \subset \mathbb{R}_+^*$

On remarque pour $x = 1$, $\frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)} = 0$

Donc S est définie et $S(1) = 0$

Soit $x > 0$, $x \neq 1$

$$\frac{\left|\frac{\ln(x)}{x^{n+1}\ln(n+1)}\right|}{\left|\frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}\right|} = \frac{1}{|x|}\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \longrightarrow \frac{1}{|x|} \begin{cases} < 1 \text{ si } x > 1 \\ > 1 \text{ si } x < 1 \end{cases}$$

Donc par la Règle de d'Alembert, $\boxed{D = [1, +\infty[}$

On note $\forall n \in \mathbb{N}^*$

2) $f_n : x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$

f^n est bien dérivable sur D et soit $x \in D$,

$$f_n'(x) = \frac{x^n/x - n x^{n-1}\ln(x)}{x^{2n}\ln(n)} = \frac{x^{n-1}(1 - n\ln(x))}{(x^n)^2 \ln(n)}$$

Donc on a les équivalences :

$$f_n'(x) = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{n} \quad (\text{car } x \in D,\ x \neq 0)$$

$$\iff x = e^{1/n}$$

Donc f_n' est $\left|\begin{array}{l} \text{positive sur } [1, e^{1/n}] \\ \text{négative ensuite} \end{array}\right.$

x	1		$e^{1/n}$		$+\infty$
f_n'		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(e^{1/n}) = \frac{1}{n e \ln(n)}$	$\searrow$	0

Donc $\|f_n\|_\infty^D = \frac{1}{n e \ln(n)}$

Or, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n e \ln(n)}$ diverge (comparaison séries-intégrales à savoir refaire!)

Donc il n'y a pas CVN.

3) Mq $\forall x \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \frac{\ln(x)}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^k}$$

$$= \frac{\ln(x)}{\ln(n+1)} \left(\frac{1}{x^{n+1}} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \right)$$

$$= \frac{\ln(x)}{\ln(n+1)} \frac{1}{x^n (x-1)}$$

$$\leq \frac{\ln(x)}{\ln(n+1)} \frac{1}{x-1}$$

$$\leq \frac{1}{\ln(n+1)}$$

inégalité de concavité $\ln(x) \leq x - 1$

4) Mq S est $\mathcal{C}^0$ sur D. Est-elle intégrable ?

Notons $S_n(x) = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(x)}{x^k \ln(k)}$

Par 3), $\forall x \in D$, $|S_n(x) - S(x)| \leq \underbrace{\frac{1}{\ln(n+1)}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$ indép de x

Donc $\|S_n - S\|_\infty^D \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc S_n converge uniformément vers S sur D.

Or les $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont $\mathcal{C}^0$

Donc S est $\mathcal{C}^0$.

Pour montrer l'intégrabilité :

- on a continuité sur D.
- un peu d'asymptotique en $+\infty$:

$$S(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 \ln(2)} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^k \ln(k)}$$

Par l'inégalité $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)x^n}$

On a : $\left|\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \dfrac{1}{\ln(3)x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{\ln(x)}{x^2\ln(2)}\right)$

Donc $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x^2\ln(2)}$

Afin de montrer l'intégrabilité, on mq $g : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2\ln(2)}$ est bien intégrable.

Or $x^{3/2} \times g(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}\ln(2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Donc $g(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$

Donc par comparaison à une f° intégrable, on peut dire que g est intégrable en $+\infty$.

Exercice 1 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \longmapsto \sin(nx\,e^{-nx^2})$

1) Soit $x \in [-1; 1]$

$\to$ si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

→ si $x \neq 0$, par croissances comparées,

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{CVS} 0$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle

2) Soit $a \in]0,1]$
Soit $x \in [a,1]$

$$|f_n(x) - f(x)| = |\sin(nxe^{-nx^2})| \leq |nxe^{-nx^2}|$$
$$\leq ne^{-na^2} \text{ indép de } x$$

Donc $\|f_n - f\|_\infty^{[a,1]} \leq ne^{-na^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croiss. comp.

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers la f° nulle sur $[a,1]$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \sin\left(e^{-1/n}\right)$$

Donc $\|f_n - f\|_\infty^{[0,1]} = \sin(e^{-1/n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(1) \neq 0$

Donc il n'y a pas CVU sur $[0,1]$