PSI – Mathématiques – DS 04– corrigé

Exercice 1. *E3A 2019 PSI*. **1.** Soit x dans J. Alors la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+nx}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante, tend vers 0 donc, d'après le critère des séries alternées, la série de terme général $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors $|f_n| : x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+nx}}$. Cette quantité est maximale lorsque $x=1$ donc

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

qui est le terme général d'une série de Riemann divergente. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement.

3. Déjà, $\sum f_n$ converge simplement. Ensuite, notons R_n le reste d'ordre n : pour tout x dans J, $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k\geqslant n+1} f_k(x)$.

Par le critère des séries alternées, on sait que pour tout x dans J,

$$|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leqslant \frac{1}{1+(n+1)},$$

quantité indépendante de x. Donc

$$\|R_n\|_\infty^J \leqslant \frac{1}{1+(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$.

4. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, comme il y a convergence uniforme, on en déduit, par théorème de la double limite, que $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 2. *E3A 2020 MP*. **1.** On remarque que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} pq^n = p\frac{1}{1-q} = 1,$$

donc on définit bien une loi de probabilité.

2. On remarque que $X+1$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X+1=k) = \mathbb{P}(X=k-1) = pq^{k-1},$$

donc $X+1$ suit une loi géométrique de paramètre p. Donc $\mathbb{E}(X+1) = \dfrac{1}{p}$ donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} - 1}$$

3. Comme $(Y = n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = Y, Y = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n) \text{ par indépendance} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} p^2(q^2)^n \\
&= p^2 \frac{1}{1-q^2} = \boxed{\frac{p}{1+q}}
\end{aligned}$$

Pour calculer $\mathbb{P}(X < Y)$, on peut utiliser encore un système complet d'événements ou bien remarquer que

$$\mathbb{P}(X < Y) + \mathbb{P}(X = Y) + \mathbb{P}(X > Y) = 1,$$

et, par symétrie, $\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(X > Y)$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < Y) &= \frac{1 - \mathbb{P}(X = Y)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{1+q}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1+q-p}{1+q} \\
&\boxed{= \frac{q}{1+q}}
\end{aligned}$$

4. Déjà, S est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Ensuite, si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = n) &= \mathbb{P}(X + Y = n) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X + Y = n, Y = k) \text{ car } (Y = k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est un système complet d'événements} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n - k, Y = k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n - k)\mathbb{P}(Y = k) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = n - k)\mathbb{P}(Y = k) \text{ car } X \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N} \\
&= \sum_{k=0}^{n} pq^{n-k}pq^k \\
&= p^2 \sum_{k=0}^{n} q^n \\
&\boxed{= p^2(n+1)q^n.}
\end{aligned}$$

On a ainsi déterminé la loi de S.

Problème – Mines PC/PSI 2021

1. On a les équivalences

$$\begin{aligned} X \text{ est d'espérance finie} &\Leftrightarrow (x_n\mathbb{P}(X = x_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est sommable} \\ &\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|\mathbb{P}(X = x_n) < +\infty \\ &\Leftrightarrow (|x_n|\mathbb{P}(X = x_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est sommable} \\ &\Leftrightarrow |X| \text{ est d'espérance finie.} \end{aligned}$$

2. On note $\mathbb{N}_M = \{n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leqslant M\}$. On sait que $\mathbb{P}(X \in \mathbb{N}_M) = 1$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_M$, $\mathbb{P}(X = x_n) = 0$. On écrit alors

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|\mathbb{P}(X = x_n) &= \sum_{n\in\mathbb{N}_M} |x_n|\mathbb{P}(X = x_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_M} |x_n|\mathbb{P}(X = x_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}_M} |x_n|\mathbb{P}(X = x_n) + 0 \\ &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}_M} M\mathbb{P}(X = x_n) \\ &\leqslant M \sum_{n\in\mathbb{N}_M} \mathbb{P}(X = x_n) \\ &\leqslant M < +\infty, \end{aligned}$$

donc X est d'espérance finie.

3. Comme X est entière, $|X|$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Or, on sait, par le cours, que $\mathbb{E}(|X|) = \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(|X| \geqslant n)$. Or,

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n},$$

donc, par comparaison à une série de Riemann divergente, la série de terme général $\mathbb{P}(|X| \geqslant n)$ diverge, ce qui signifie que $\mathbb{E}(X) = +\infty$.
De même,

$$\mathbb{E}(X^2 \geqslant n) = \mathbb{E}(|X| \geqslant \sqrt{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{\sqrt{n}},$$

donc, par comparaison à une série de Riemann divergente, la série de terme général $\mathbb{P}(|X| \geqslant \sqrt{n})$ diverge, ce qui signifie que $\mathbb{E}(X^2) = +\infty$.

4. Puisque X est symétrique, les variables aléatoires X et $-X$ ont même loi.
D'après le principe de transfert de l'égalité en loi (théorème 1 du préambule), $f(X)$ et $f(-X)$ ont aussi même loi.
Par imparité de f, $f(-X) = -f(X)$, donc $f(X)$ et $-f(X)$, c'est-à-dire que $f(X)$ est symétrique.
On suppose que $f(X)$ est d'espérance finie. Puisque $f(X)$ et $-f(X)$ ont même loi, leurs espérances sont égales, donc : $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(-f(X))$. Or l'espérance est linéaire, donc : $\mathbb{E}(f(X)) = -\mathbb{E}(f(X))$. On en déduit : $\mathbb{E}(f(X)) = 0$.

5. Soient k et ℓ dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((-X, -Y) = (k, \ell)) &= \mathbb{P}(-X = k, -Y = \ell) \\ &= \mathbb{P}(X = -k, Y = -\ell) \\ &= \mathbb{P}(X = -k)\mathbb{P}(Y = -\ell) \text{ par indépendance} \\ &= \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = \ell) \text{ par symétrie} \\ &= \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) \text{ par indépendance,} \end{aligned}$$

donc $(-X,-Y)$ suit la même loi que (X,Y). Maintenant, en posant $f : (x,y) \mapsto x+y$, par le principe du transfert en loi, comme (X,Y) et $(-X,-Y)$ suivent la même loi, $f(X,Y)$ et $f(-X,-Y)$ suivent la même loi, donc $X+Y$ et $-X-Y$ suivent la même loi, donc $X+Y$ est symétrique.

6. Notons, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.

Caractère défini. Soit $x \in [0,1]$. Alors la suite $\left(\dfrac{x^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive décroissante et tend vers 0, donc, d'après le critère des séries alternées, la série de terme général $(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ converge, i.e. S est définie sur $[0,1]$.

Caractère continu. $\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^*,\ u_n \text{ est continue sur } [0,1].}$ De plus, par le critère des séries alternées, on sait que pour tout x dans $[0,1]$, pour tout n dans $\mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k\geqslant n+1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1},$$

indépendant de x. Donc, en nommant $R_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k\geqslant n+1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ le reste d'ordre n de la série, on vient de démontrer que

$$\|R_n\|_\infty^{[0,1]} \leqslant \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où la $\boxed{\text{convergence uniforme de la série de fonctions } \sum u_n \text{ sur } [0,1]}$ et donc $\boxed{\text{la continuité de } S.}$

7. Soit $a \in]0,1[$.

- pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, u_n est dérivable, de dérivée $u_n' : x \mapsto (-1)^{n-1}x^{n-1}$
- la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,a]$.
- soit x dans $[0,a]$. Alors

$$|u_n'(x)| = |x|^{n-1} \leqslant a^{n-1},\ \text{ indépendant de } x$$

  Donc $\|u_n'\|_\infty^{[0,a]} \leqslant a^{n-1}$, terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série de fonctions converge uniformément sur $[0,a]$.

Par théorème de dérivation d'une somme de séries de fonctions, S est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,a]$, pour tout $a \in]0,1[$ donc S est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$.

8. On en déduit que pour tout x dans $[0,1[$,

$$S'(x) = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1}{x+1},$$

donc, pour tout x dans $[0,1[$, $S(x) = S(0) + \ln(1+x) = \ln(1+x)$.
Comme S et $\ln(1+x)$ sont toutes deux continue sur $[0,1]$, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ S(x) = \ln(1+x).}$$

9. Le résultat est évident vu le travail fait précédemment.

10. On note $\varphi : t \mapsto |1-\mathrm{e}^{it}|^2$. On remarque que

$$\varphi(t) = (1-\cos(t))^2 + \sin(t)^2 = 2 - 2\cos(t),$$

qui est minimal en θ (étant donné que cos est minimal en π, donc $2-2\cos$ est minimal en π).

Donc $\boxed{t \mapsto |1-\mathrm{e}^{it}| \text{ admet un minimum en } \theta, \text{ égal à } |1-\mathrm{e}^{i\theta}|>0.}$

Ainsi, pour tout t dans $[\pi, \theta]$,

$$\left|1-\mathrm{e}^{it}\right| \geqslant |1-\mathrm{e}^{i\theta}| \neq 0,$$

donc $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{it}}{1-\mathrm{e}^{it}}$ est définie et continue sur $[\pi, \theta]$, donc $\mathrm{I}(\theta)$ est bien définie.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]0, 2\pi[$. Alors

$$\begin{aligned}
A_n(\theta) - \mathrm{I}(\theta) &= \int_\pi^\theta \sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{ikt} dt - \int_\pi^\theta \frac{\mathrm{e}^{it}}{1-\mathrm{e}^{it}} dt \\
&= \int_\pi^\theta \sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{ikt} - \frac{\mathrm{e}^{it}}{1-\mathrm{e}^{it}} dt \\
&= \int_\pi^\theta \mathrm{e}^{it} \frac{1-\mathrm{e}^{int}}{1-\mathrm{e}^{it}} - \frac{\mathrm{e}^{it}}{1-\mathrm{e}^{it}} dt \\
&= -\int_\pi^\theta \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)t}}{1-\mathrm{e}^{it}} dt.
\end{aligned}$$

Intégrons par parties, en intégrant $t \mapsto \mathrm{e}^{i(n+1)t}$ et en dérivant $t \mapsto \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{it}}$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_\pi^\theta \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)t}}{1-\mathrm{e}^{it}} dt &= \left[\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{it}}\right]_\pi^\theta - \int_\pi^\theta \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \frac{i}{(1-\mathrm{e}^{it})^2} dt \\
&= \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{i\theta}} - \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\pi}}{i(n+1)} \frac{1}{2} - \int_\pi^\theta \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \frac{i}{(1-\mathrm{e}^{it})^2} dt.
\end{aligned}$$

Or,

- $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)} \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)|1-\mathrm{e}^{i\theta}|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$
- $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{i(n+1)\pi}}{i(n+1)} \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$
- enfin,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\pi^\theta \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \frac{i}{(1-\mathrm{e}^{it})^2} dt\right| &\leqslant \int_\pi^\theta \left|\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \frac{i}{(1-\mathrm{e}^{it})^2}\right| dt \\
&\leqslant \int_\pi^\theta \frac{1}{(n+1)(1-\mathrm{e}^{it})^2} dt \\
&\leqslant \frac{1}{n+1} \int_\pi^\theta \frac{1}{(1-\mathrm{e}^{it})^2} dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } A_n(\theta) - \mathrm{I}(\theta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

12. On écrit que pour tout t dans $[\pi, \theta]$,

$$\begin{aligned}
\frac{e^{it}}{1-e^{it}} &= \frac{(\cos(t)+i\sin(t))(1-e^{-it})}{|1-e^{it}|^2} \\
&= \frac{(\cos(t)+i\sin(t))(1-\cos(t)+i\sin(t))}{2-2\cos(t)} \\
&= \frac{\cos(t)-\cos^2(t)+i\cos(t)\sin(t)+i\sin(t)-i\cos(t)\sin(t)-\sin^2(t)}{2-2\cos(t)} \\
&= \frac{\cos(t)-1+i\sin(t)}{2-2\cos(t)} \\
&= -\frac{1}{2}+i\frac{\sin(t)}{2-2\cos(t)}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(\theta) &= \int_\pi^\theta -\frac{1}{2}+i\frac{\sin(t)}{2-2\cos(t)}dt \\
&= \frac{\pi-\theta}{2}+i\int_\pi^\theta \frac{\sin(t)}{2-2\cos(t)}dt \\
&= \frac{\pi-\theta}{2}+i\frac{1}{2}\ln(1-\cos(t)]_\pi^\theta \\
&= \frac{\pi-\theta}{2}+i\frac{1}{2}\ln(1-\cos(\theta)-\frac{1}{2}\ln(2) \\
&= \frac{\pi-\theta}{2}+i\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos(\theta)}{2}\right) \\
&= \frac{\pi-\theta}{2}+i\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\left((1-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{2}\right) \\
&= \frac{\pi-\theta}{2}+i\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}\right) \\
&= \frac{\pi-\theta}{2}+i\ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons

$$\begin{aligned}
A_n(\theta) &= \int_\pi^\theta \sum_{k=1}^n e^{ikt}dt \\
&= \sum_{k=1}^n \int_\pi^\theta e^{ikt}dt \\
&= \sum_{k=1}^n \left[\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_\pi^\theta \\
&= -i\sum_{k=1}^n \left(\frac{e^{ik\theta}}{k}-\frac{(-1)^k}{k}\right) \\
&= -i\sum_{k=1}^n \left(\frac{\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)}{k}-\frac{(-1)^k}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k}-i\sum_{k=1}^n \frac{\cos(k\theta)}{k}-i\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $\mathfrak{Re}(A_n(\theta)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{Re}(\mathrm{I}(\theta))$,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{Re}(\mathrm{I}(\theta)) = \frac{\pi-\theta}{2}.}$$

De même,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\mathfrak{Im}(\mathrm{I}(\theta)) = -\ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Or, par la question 9,

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2),$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - \ln(2) = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right),}$$

d'où les résultats voulus !

14. Comme pour tout ω dans Ω, $|\cos(tX(\omega))| \leqslant 1$, $\cos(tX)$ est bien d'espérance finie car bornée, donc Φ_X est bien définie pour tout t ; on a de plus

$$|\mathbb{E}(\cos(tX))| \leqslant \mathbb{E}(|\cos(tX)|) \leqslant 1.$$

Enfin, comme pour tout ω dans Ω, $\cos(-tX(\omega)) = \cos(tX(\omega))$, il vient immédiatement que $\Phi_X(-t) = \Phi_X(t)$.

15. On écrit que, pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$\Phi_X(t) = \sum_{n\geqslant 0} \cos(tx_n)\mathbb{P}(X = x_n)$$

Notons, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n : t \mapsto \cos(tx_n)\mathbb{P}(X = x_n)$. Alors

- pour tout n dans $\mathbb{N}$, u_n est continue,
- pour tout t dans $\mathbb{R}$, $|u_n(t)| \leqslant \mathbb{P}(X = x_n)$, indépendant de t, donc $\|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \mathbb{P}(X = x_n)$. Ainsi, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, par théorème de continuité des séries de fonctions Φ_X est bien continue sur $\mathbb{R}$.

16. Par définition, comme X est à valeurs entières, on peut écrire que

$$\begin{aligned}
\Phi_X(t) &= \mathbb{E}(\cos(tX)) \\
&= \mathbb{E}(\cos(t|X|) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(nt)\mathbb{P}(|X| = n) \\
&= \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(nt)\left(\mathbb{P}(|X| \geqslant n) - \mathbb{P}(|X| \geqslant n+1)\right),}
\end{aligned}$$

car $\mathbb{P}(|X| = n) = \mathbb{P}(|X| \geqslant n) - \mathbb{P}(|X| \geqslant n+1)$. Ensuite, on sait que

$$R_n \cos(nt) = \frac{\alpha}{n}\cos(nt) + v_n,$$

où $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or,

- la série de terme général $\dfrac{\alpha}{n}\cos(nt)$ converge par la question 13,
- la série de terme général v_n converge par comparaison à une série de Riemann convergente,

donc la série de terme général $R_n\cos(nt)$ converge. On a alors

$$\begin{aligned}\Phi_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\cos(nt)\mathbb{P}(|X|\geqslant n) - \sum_{n=0}^{+\infty}\cos(nt)\mathbb{P}(|X|\geqslant n+1)\\ &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(nt)\mathbb{P}(|X|\geqslant n) - \sum_{n=0}^{+\infty}\cos((n-1)t)\mathbb{P}(|X|\geqslant n)\\ &\boxed{= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\cos(nt)-\cos((n-1)t\right)\mathbb{P}(|X|\geqslant n).}\end{aligned}$$

17. On note, pour tout t dans $\mathbb{R}$, $f_n(t)=\left(R_n-\dfrac{\alpha}{n}\right)\mathrm{e}^{int}$. Soit $t\in\mathbb{R}$. On sait que

$$\left|\left(R_n-\frac{\alpha}{n}\right)\mathrm{e}^{int}\right| \leqslant \left|R_n-\frac{\alpha}{n}\right|,\ \text{indépendant de } x$$

Donc

$$\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \left|R_n-\frac{\alpha}{n}\right| \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformeément sur $\mathbb{R}$. Comme pour tout n dans $\mathbb{N}$, f_n est continue, on en déduit que $F: t\mapsto \sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. En particulier,

$$F(t)\underset{t\to 0}{\longrightarrow} F(0)=\sum_{n\geqslant 0} R_n-\frac{\alpha}{n}\in\mathbb{R}.$$

donc, par comparaison à une série à termes positifs, la série de terme général $\left(R_n-\dfrac{\alpha}{n}\right)\mathrm{e}^{int}$ converge absolument donc converge. D'où l'existence de C dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(R_n-\frac{\alpha}{n}\right)\mathrm{e}^{int}\underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} C.$$

Or, on sait que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{int}}{n}$ converge (grâce à la question 13). On en déduit que $\sum R_n\mathrm{e}^{int}$ converge et que

$$\sum_{n\geqslant 1} R_n\mathrm{e}^{int} = \alpha\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{e}^{int}}{n} + f(t),$$

avec $f(t)\underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} C$, c'est-à-dire que, si $f(t)=u(t)+iv(t)$, $u(t)\underset{t\to 0^+}{=} C+o(1)$ et $v(t)\underset{t\to 0^+}{=} o(1)$. Or, par la question 13,

$$\begin{aligned}\alpha\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{e}^{int}}{n} &= \alpha\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(nt)}{n} + i\alpha\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(nt)}{n}\\ &= -\alpha\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) + i\alpha\frac{\pi-t}{2}.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
-\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) &\underset{t\to0^+}{=} -\ln\left(2\frac{t}{2}+o(t)\right)\\
&\underset{t\to0^+}{\sim} -\ln(t),
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} R_n\cos(nt) \underset{t\to0^+}{=} -\alpha\ln(t)+u(t)+o(\ln(t)) \underset{t\to0^+}{=} O(\ln(t).}$$

et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} R_n\cos(nt) \underset{t\to0^+}{=} \alpha\frac{\pi}{2}+o(1).}$$

18. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\Phi_X(t) &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty} R_n\left(\cos(nt)-\cos((n-1)t)\right)\\
&= 1+\sum_{n=1}^{+\infty} R_n\left(\cos(nt)-\cos(nt)\cos(t)-\sin(nt)\sin(t)\right)\\
&= 1+(1-\cos(t))\sum_{n=1}^{+\infty} R_n\cos(nt)-\sum_{n=1}^{+\infty} R_n\sin(nt)\sin(t)\\
&\underset{t\to0}{=} 1+\frac{t^2}{2}O(\ln(t)-(t+o(1))\left(\frac{\pi\alpha}{2}+o(1)\right)\\
&\boxed{\underset{t\to0}{=} 1-t\frac{\pi\alpha}{2}+o(t),}
\end{aligned}$$

ce qui est exactement le résultat demandé ! La fonction Φ_X admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, elle est donc dérivable en 0.

19. Soit $t\in\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\Phi_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}(\cos((X+Y)t))\\
&= \mathbb{E}(\cos(Xt)\cos(Yt)-\sin(Xt)\sin(Yt))\\
&= \mathbb{E}(\cos(Xt)\cos(Yt))-\mathbb{E}(\sin(Xt)\sin(Yt)) \text{ par linéarité}\\
&= \mathbb{E}(\cos(Xt))\mathbb{E}(\cos(Yt))-\mathbb{E}(\sin(Xt))\mathbb{E}(\sin(Yt)) \text{ par indépendance.}
\end{aligned}$$

Mais sin est impaire et X est symétrique, donc $\mathbb{E}(\sin(Xt))=0$, d'où

$$\boxed{\Phi_{X+Y}(t)=\mathbb{E}(\cos(Xt))\mathbb{E}(\cos(Yt))=\Phi_X(t)\Phi_Y(t).}$$

20. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Alors, comme à la question 5, on montre (par récurrence) que $-X_1-X_2-\cdots-X_n$ suit la même loi que $X_1+\cdots+X_n$, donc que M_n est symétrique. On en déduit ainsi, par indépendance et par la question 19 que, si $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\Phi_{M_n}(t) &= \mathbb{E}\left(\cos\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}\right) t\right)\right) \\
&= \Phi_{M_{n-1}}(t)\mathbb{E}\left(\cos\left(\frac{X_n}{n} t\right)\right) \text{ par le même raisonnement qu'à la question précédente} \\
&= \Phi_{M_{n-1}}(t)\Phi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \Phi_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right) \text{ par une récurrence simple} \\
&\boxed{= \left(\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n} \text{ car } X_1, \dots, X_n \text{ sont i.i.d.}
\end{aligned}$$

21. Soit $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ Alors $\frac{t}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0^+$, donc

$$\begin{aligned}
\Phi_{M_n}(t) &= \mathrm{e}^{n \ln\left(\Phi_{X_1}(t/n)\right)} \\
&\underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{e}^{n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\frac{\pi\alpha}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\
&\underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{e}^{-n\frac{t}{n}\frac{\pi\alpha}{2} + o(1))} \\
&\boxed{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\frac{t\pi\alpha}{2}}.}
\end{aligned}$$

Si $t < 0$, on montre de même que $\Phi_{M_n}(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\frac{t\pi\alpha}{2}}$, d'où le résultat demandé.

22. La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$: on remarque que si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Phi_{M_n}(2\pi n) = (\Phi_{X_1}(2\pi))^n.$$

Or, comme X_1 est entière, on remarque que $\cos(2\pi X_1)$ est constante égale à 1, donc $(\Phi_{X_1}(2\pi))^n = 1$ pour tout n. Donc, en notant $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{\pi\alpha|t|}{2}}$,

$$\|\Phi_{M_n} - \varphi\|_\infty^{\mathbb{R}} \geqslant \left|1 - \mathrm{e}^{-\frac{\pi\alpha 2\pi n}{2}}\right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc la convergence n'est pas uniforme.