Semaine 10 – Colle du lundi 09/12 à 8h

<table>
<tr><th>Nom</th><th>Énoncé et commentaires</th><th>Note</th></tr>
<tr><td></td><td>

Planche python. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient a et b deux réels. On pose $M = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \cdots \\ b & a & b & a & \cdots \\ a & b & a & b & \cdots \\ b & a & b & a & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. **[Py]** Proposer une fonction python `matrice(n,a,b)` qui renvoie la matrice comme décrit ci-dessus.
2. **[Py]** Déterminer pour certaines valeurs de `a,b,n` les vecteurs propres et valeurs propres de la matrice et conjecturer le caractère diagonalisable de la matrice. On repèrera en particulier les vecteurs propres associés à des valeurs propres non nulles, dans le cas où n est pair, et dans celui où n est impair. *On pourra utiliser `np.round(A,d)` qui prend en argument un tableau numpy `A` et qui renvoie le tableau `A` dont toutes les composantes ont été arrondies à 10^{-d} près.*
3. Dans le cas où $a = b$, quel est le rang de la matrice M ? Démontrer qu'elle est alors diagonalisable.
4. Dans le cas où $a \neq b$, démontrer la conjecture faite précédemment.

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

1. **Cours.** Le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur.
2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$.
   (a) Étudier la convergence de (f_n), puis la limite de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.
   (b) Déterminer le domaine de définition de $S(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n(x)$.
   (c) Trouver une relation entre $S(x)$ et $S(1/x)$ pour $x \in]0,1]$.
   (d) Étudier la continuité de S sur son domaine de définition.
   (e) Déterminer la limite de $S(x)$ quand x tend vers l'infini.
3. À quelle condition la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

1. **Cours.** Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Arctan} \frac{1}{n}$.
3. Soit A la matrice définie par $a_{i,j} = 1$ si $|i-j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. Déterminer θ de façon que le vecteur $(\sin\theta, \ldots, \sin(n\theta))^\top$ soit propre pour A. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

</td><td></td></tr>
</table>