PSI – Programme de colles
Semaine 11 – du 16 au 20 décembre 2024

Programme en bref.

— Questions de cours et exercices sur la réduction.

Exemples de questions de cours ou d'exercices très classiques

1. Une somme finie de sous-espaces propres est directe.
2. Si λ est une valeur propre, si m est sa multiplicité dans χ_u, si $E_\lambda(u)$ est le sous-espace propre correspondant, alors
$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(u)) \leqslant m.$$
3. Si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.
4. Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et que pour tout λ dans le spectre de u, la dimension de $E_\lambda(u)$ égale la multiplicité de λ dans χ_u.
5. Si P est un polynôme annulateur de u, alors le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de P.
6. Si u est diagonalisable, alors $\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}(X-\lambda)$ annule u.
7. L'induit d'un diagonalisable est diagonalisable.
8. Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. (NB : officiellement, la preuve est HP)

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Éléments propres	
Droite stable par un endomorphisme.	
Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme.	Équation aux éléments propres $u(x)=\lambda x$. Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	Notation $\mathrm{Sp}(u)$. La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.	Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Si un polynôme P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x)=\lambda x$, alors $P(u)(x)=P(\lambda)x$.
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $AX=\lambda X$.
b) Polynôme caractéristique	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u. Coefficients de degrés 0 et $n-1$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme sont les racines de son polynôme caractéristique.	Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.
Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.	Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.
Théorème de Cayley-Hamilton.	La démonstration n'est pas exigible.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Diagonalisation en dimension finie	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Interprétation en termes d'endomorphisme. Application au calcul des puissances d'une matrice diagonalisable, à des exemples de systèmes différentiels à coefficients constants. Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n=2$ ou $n=3$.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E.	Exemple des projecteurs et des symétries.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace.	Traduction matricielle.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Polynôme caractéristique scindé à racines simples. Traduction matricielle.
d) Diagonalisabilité et polynômes annulateurs	
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.	La démonstration n'est pas exigible. Traduction matricielle. Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme.
L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.	
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$ pour polynôme annulateur.	
e) Trigonalisation en dimension finie	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.	Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	Interprétation en termes d'endomorphisme.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.	La démonstration n'est pas exigible. Traduction matricielle.
Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.	La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.