PROBLÈME 2
Puissances de matrices et limites de suites de matrices

Partie I - Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

Q18. Lorsque a et b sont réels, la matrice $M(a, b)$ est symétrique réelle, donc, par le théorème spectral, elle est diagonalisable.

Q19. Le calcul matriciel donne $M(a, b)V = (b + (n - 1)a)V$. Et comme V n'est pas le vecteur nul, par définition :

$$\boxed{V \text{ est un vecteur propre de } M(a, b) \text{ associé à la valeur propre } b + (n - 1)a.}$$

Q20. $M(1, 0)$ est unitaire et de degré n donc il est complètement défini si l'on connaît ses racines (complexes) et leurs multiplicités respectives.

• On remarque que la matrice $M(1, 0) + I_n$ est de rang $1 < n$ (tous les coefficients sont égaux à 1 et donc $\mathrm{Im}(M(1, 0) + I_n) = \mathrm{Vect}\{V\}$).

Par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(M(1, 0) + I_n)) = n - 1 > 0$, ainsi, -1 est valeur propre de $M(1, 0)$ et sa multiplicité m_{-1} est au moins égale à $n - 1$.

• Par la question précédente, $b + (n - 1)a = n - 1$ est aussi valeur propre de $M_{0,1}$ et elle est distincte de -1 car $n > 0$. Comme la somme des multiplicité de valeurs propres de $M(1, 0)$ est égale à n, celle de $n - 1$ ne peut excéder 1, elle est donc égale à 1 et il n'y a pas d'autre valeur propre.

$$\boxed{P_{1,0}(X) = (X - (n - 1))^{m_{n-1}}(X + 1)^{m_{-1}} = (X - (n - 1))(X + 1)^{n-1}.}$$

Q21. On suppose que $a \neq 0$. Par définition du polynôme caractéristique, et par propriétés du déterminant, on a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} P_{a,b}(X) &= \det(XI_n - M(a,b)) = \det(XI_n - bI_n - aM(1,0)) = \det\left(a\left(\frac{X-b}{a}I_n - M(1,0)\right)\right) \\ &= a^n \det\left(\frac{X-b}{a}I_n - M(1,0)\right) \end{aligned}$$

Et donc $\boxed{P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\frac{X-b}{a}\right).}$

Le résultat de la question précédente donne alors :

$$P_{a,b}(X) = a^n\left(\frac{X-b}{a} - (n-1)\right)\left(\frac{X-b}{a}+1\right)^{n-1} = (X-(b+a(n-1)))\,(X-(b-a))^{n-1}.$$

De plus, $b - a = (b + (n-1)a) \iff na = 0 \iff a = 0$ (car $n > 0$), on distingue donc deux cas :

- Si $a \neq 0$: $\mathrm{Sp}(M(a,b)) = \{b-a, (b+(n-1)a)\}$ avec $m_{b+a(n-1)} = 1$ et $m_{b-a} = n-1$.
- Si $a = 0$: $\mathrm{Sp}(M(0,b)) = \{b\}$ avec $m_b = n$.

Q22. On définit $Q_{a,b}(X) = (X-(b-a))(X-(b+(n-1)a))$.

La matrice $M(a,b)-(b-a)I_n$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à b donc son image est contenue dans $\mathrm{Vect}\{V\}$. De plus, d'après la question (**Q19**), on a :

$$\mathrm{Vect}\{V\} \subset E_{(b+(n-1)a)}(M(a,b)) = \mathrm{Ker}(M(a,b)-(b+(n-1)a)I_n).$$

On a donc

$$\mathrm{Im}(M(a,b)-(b-a)I_n) \subset \mathrm{Ker}(M(a,b)-(b+(n-1)a)I_n)$$

Et par conséquent $(M(a,b)-(b-a)I_n)(M(a,b)-(b+(n-1)a)I_n) = Q_{a,b}(M(a,b)) = 0$.

$$\boxed{Q_{a,b} \text{ est un polynôme annulateur de } M(a,b).}$$

Remarque :
on peut aussi calculer directement. En notant J la matrice dont tous les coefficients valent 1, on a :

$$\begin{aligned} Q_{a,b}(M(a,b)) &= (M(a,b)-(b-a)I_n) \times (M(a,b)-(b+(n-1)a)I_n) \\ &= (a(M(1,0)+I_n)) \times (a(M(1,0)-(n-1)I_n)) \\ &= a^2\ J \times (M(1,0)-(n-1)I_n) \\ &= a^2\ (JM(1,0)-(n-1)J) = 0 \end{aligned}$$

De plus, $b-a = (b+(n-1)a) \iff na = 0 \iff a = 0$ (car $n > 0$), comme précédemment, on distingue donc deux cas :

- Si $a \neq 0$: $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$ et il est scindé à racines simples donc $M(a,b)$ est diagonalisable.
- Si $a = 0$: alors $M(a,b) = bI_n$ est diagonale, a fortiori diagonalisable.

On a donc démontré : $\boxed{\text{Pour tout } (a,b) \in \mathbb{C}^2, \text{ la matrice } M(a,b) \text{ est diagonalisable.}}$

Q23. On suppose que $a \neq 0$. Le polynôme $Q_{a,b}$ n'est pas le polynôme nul, on peut donc effectuer la division euclidienne de X^k par $Q_{a,b}$. Pour tout $k \in N$, on a :

$$\exists ! P_k \in \mathbb{C}[X],\ \exists ! R_k \in \mathbb{C}[X], \qquad X^k = P_k(X)Q_{a,b}(X) + R_k(X) \quad \text{et} \quad \deg(R_k) < \deg(Q_k) = 2.$$

Ainsi, il existe des complexes α_k et β_k tels que : $R_k(X) = \alpha_k X + \beta_k$.

On évalue cette égalité polynomiale aux racines (distinctes) de $Q_{a,b}$. On obtient :

$$\begin{aligned} &(b-a)^k = \alpha_k(b-a) + \beta_k,\\ &(b+(n-1)a)^k = \alpha_k(b+(n-1)a) + \beta_k. \end{aligned}$$

Puisque $a \neq 0$, ce système a une unique solution (α_k, β_k). Après calculs, on trouve :

$$\alpha_k = \frac{1}{na}\left((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k\right) \text{ et } \beta_k = \frac{1}{na}\left((b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a)\right).$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^k par $Q_{a,b}(X)$ est :

$$\boxed{R_k(X) = \frac{1}{na}\left(\left((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k\right)X + \left((b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a)\right)\right).}$$

Puisque $X^k = P_k(X)Q_{a,b}(X) + R_k(X)$ on a :

$$M(a,b)^k = P_k(M(a,b))Q_{a,b}(M(a,b)) + R_k(M(a,b)) = R_k(M(a,b)) \qquad \text{car } Q_{a,b}(M(a,b)) = 0$$

Et donc :

$$\boxed{M(a,b)^k = \frac{1}{na}\Big(\left((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k\right)M(a,b) + \left((b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a)\right)I_n\Big)}$$

Q24. Si $|b-a| < 1$ et si $|(b+(n-1)a| < 1$ alors $\lim\limits_{k\to+\infty}(b-a)^k = \lim\limits_{k\to+\infty}(b+(n-1)a)^k = 0$ et donc :

$$\begin{aligned} \left\|\left((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k\right)M(a,b)\right\| &= \left|(b+(n-1)a)^k - (b-a)^k\right| \|M(a,b)\| \\ &\leq \left(|b+(n-1)a|^k + |b-a|^k\right)\|M(a,b)\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Donc par encadrement, $\lim\limits_{k\to+\infty}\left((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k\right)M(a,b) = 0$.

De même, on montrerait que $\lim\limits_{k\to+\infty}\left((b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a)\right)I_n = 0$.

Et par opérations sur les limites : $\boxed{\text{Si } |b-a| < 1 \text{ et si } |(b+(n-1)a| < 1 \text{ alors } \lim\limits_{k\to+\infty} M(a,b)^k = 0.}$

Partie II - Limite des puissances d'une matrice

Q25. T est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, sa première colonne donne l'image de e_1 : $u(e_1) = \lambda_1 e_1$.

Par une récurrence immédiate, on montrerait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1$. Et puisque $|\lambda_1| < 1$, on a :

$$\boxed{\|u^k(e_1)\| = \|\lambda_1^k e_1\| = |\lambda_1|^k \|e_1\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

Et de manière immédiate $\lim_{k\to+\infty} u^k(e_1) = 0$.

Q26. La $i+1$-ème colonne de T donne l'image de e_{i+1} par u. Plus précisément :

$$u(e_{i+1}) = \underbrace{T_{1,i+1}e_1 + \cdots + T_{i,i+1}e_i}_{=x} + \lambda_{i+1}e_{i+1}.$$

On a bien trouvé $x \in \text{Vect}\{e_1, \ldots, e_i\}$ tel que $\boxed{u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x.}$

On pourrait démontrer le résultat demandé par récurrence. On choisit ici de faire apparaître une série télescopique.

• si $\lambda_{i+1} \neq 0$: on a $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x$ et comme u^m est linéaire :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ u^{m+1}(e_{i+1}) - \lambda_{i+1}u^m(e_{i+1}) = u^m(x).$$

On divise par $\lambda_{i+1}^{m+1} \neq 0$: $\dfrac{u^{m+1}(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^{m+1}} - \dfrac{u^m(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^m} = \dfrac{u^m(x)}{\lambda_{i+1}^{m+1}}$. On ajoute ces égalités pour $m = 0, \ldots, k-1$.
La somme est télescopique, il reste :

$$\frac{u^k(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^k} - \frac{u^0(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^0} = \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{-m-1}u^m(x).$$

En multipliant par λ_{i+1}^k, on obtient le résultat demandé.

• si $\lambda_{i+1} = 0$: alors d'une part, $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x = x$ donc $u^k(e_{i+1}) = u^{k-1}(x)$.
Et d'autre part, dans la somme suivante, tous les termes sont nuls sauf un, celui pour $m = k-1$:

$$\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1}u^m(x) = u^{k-1}(x) = u^k(e_{i+1}).$$

Dans les deux cas, on a bien démontré que $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u^k(e_{i+1}) = \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1}u^m(x).}$

Q27. On a $x \in \text{Vect}\{e_1, \ldots, e_i\}$ donc il existe des complexes $x_1, \ldots, x_i$ tels que $x = \sum_{j=1}^{i} x_i e_i$.

Par linéarité de u, $u^k(x) = \sum_{j=1}^{i} x_i u^k(e_i)$. On on a supposé que pour tout $j \in [\![1, i]\!]$, $\lim_{k\to+\infty} u^k(e_i) = O$.

Par opérations sur les limites, on a donc aussi :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} u^k(x) = O.}$$

Une première conséquence est que la suite $(u^k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée : $\exists M > 0,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \|u^k(x)\| \leq M$.
On montre le résultat demandé en revenant à la définion de limite.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé : on a les majorations suivantes (inégalité triangulaire).

$$\left\|\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1}u^m(x)\right\| \leq \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1}\|u^m(x)\|.$$

Or, $\lim_{m\to+\infty} u^m(x) = 0$ donc, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall k \geq N,\ \|u^m(x)\| \leq \varepsilon.$$

Pour $k > N$, on coupe la somme en 2. On sait que $|\lambda_{i+1}| < 1$ donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_{i+1}|^n$ converge et a pour somme $\dfrac{1}{1-|\lambda_{i+1}|}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1}\|u^m(x)\| &= \sum_{m=0}^{N-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \underbrace{\|u^m(x)\|}_{\leq M} + \sum_{m=N}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \underbrace{\|u^m(x)\|}_{\leq \varepsilon} \\
&\leq M \sum_{m=0}^{N-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} + \varepsilon \sum_{m=N}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \\
&\leq M \sum_{n=k-N}^{+\infty} |\lambda_{i+1}|^n + \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_{i+1}|^n \\
&\leq \frac{M}{1-|\lambda_{i+1}|} |\lambda_{i+1}|^{k-N} + \varepsilon \frac{1}{1-|\lambda_{i+1}|}
\end{aligned}$$

Or $\lim_{k\to+\infty} |\lambda_{i+1}|^{k-N} = 0$ donc il existe $N' \geq N$ tel que pour tout $k \geq N'$, on ait $|\lambda_{i+1}|^{k-N} \leq \varepsilon$.

En reportant dans la majoration précédente, on a trouvé N' tel que pour tout entier $k \geq N'$, on ait :

$$\left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leq \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| \leq \varepsilon \frac{M+1}{1-|\lambda_{i+1}|} = C\varepsilon.$$

Quitte à reprendre le raisonnement avec $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{C}$, on a bien démontré que :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0.}$$

On a alors, en utilisant (**Q26**) et $|\lambda_{i+1}| < 1$:

$$\|u^k(e_{i+1})\| = \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leq |\lambda_{i+1}|^k \|e_{i+1}\| + \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et par le théorème d'encadrement $\boxed{\lim_{k\to+\infty} u^k(e_{i+1}) = 0.}$

Q28. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ on note $\mathcal{P}_i$ la propriété : $\lim_{k\to+\infty} u^k(e_i) = 0$.

En question (**Q25**), on a montré que $\mathcal{P}_1$ est vraie. Dans les deux questions suivantes, on a montré que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ si $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_i$ sont vraies, alors $\mathcal{P}_{i+1}$ est vraie.

Par le principe de **récurrence forte**, $\mathcal{P}_i$ est vraie pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

On note come dans l'énoncé, $T_{i,j}^{(k)}$ les coefficients de T^k. Puisque T^k est la matrice de u^k dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\forall j \in \{1,\dots,n\},\ u^k(e_j) = \sum_{i=1}^{n} T_{i,j}^{(k)} e_i$$

Et comme $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_i) = 0$, ses suites coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ tendent aussi vers 0.

Et finalement :

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, \quad \lim_{k\to+\infty} T_{i,j}^{(k)} = 0.$$

Et par conséquent, $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} T^k = 0.}$

Q29. On suppose juste que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ |\lambda| < 1$.

On note $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de A répétées avec multiplicité. Puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le polynôme caractérisque de A est scindé et donc A est trigonalisable. Plus précisement, il existe une matrice tringulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, et une matrice inversible P telles que :

$$A = PTP^{-1}.$$

• D'après les questions précédentes, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} T^k = 0$.

• De plus, $A^k = (PTP^{-1})^k = PTP^{-1}.PTP^{-1}\dots PTP^{-1} = PT^kP^{-1}$.

• Enfin, l'application $\varphi : M \longmapsto PMP^{-1}$ est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, elle est continue, en particulier continue en 0. Puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} T^k = 0$, on a donc :

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi(T^k) = \varphi(0) = 0.$$

Ce qui s'écrit $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0.}$

Partie III - Application à la méthode de Gauss-Seidel

Q30. Remarquons tout d'abord que puisque A est une matrice à diagonale strictement dominante et puisqu'un module est un réel positif ou nul, on a, grâce à l'inégalité stricte : $\forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad |a_{ii}| > 0$. M est une matrice triangulaire inférieure donc

$$|\det(M)| = \prod_{i=1}^{n} |m_{ii}| = \prod_{i=1}^{n} |a_{ii}| > 0$$

Ainsi $\quad \det(M) \neq 0 \quad$ et $\boxed{M \text{ est inversible.}}$

Q31. Avec les notations de l'énoncé :

$$BX + M^{-1}Y = M^{-1}FX + M^{-1}AX = M^{-1}(F + A)X = M^{-1}MX = X$$

Q32. Par définition de λ et V, $\quad V \neq 0 \quad$ et $\quad BV = \lambda V$.
Donc $\quad M^{-1}FV = \lambda V \quad$ et en multipliant par M à gauche, $\boxed{FV = \lambda MV.}$

L'énoncé ne le dit pas mais il est clair que $\quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

En utilisant les définitions de M et F et la convention de l'énoncé, l'égalité vectorielle précédente se traduit alors par

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}v_j = \lambda \left(\sum_{j=1}^{i} a_{ij}v_j\right)$$

En isolant le terme a_{ii}, on obtient donc

$$\boxed{\lambda a_{ii}v_i = -\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}v_j\right)}$$

Q33. $\{|v_j| \ / \ j \in [\![1,n]\!]\}$ est un ensemble fini de réels donc admet un maximum $|v_{i_0}|$. Comme V est un vecteur non nul, il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $v_j \neq 0$ et donc $\quad |v_{i_0}| \geqslant |v_j| > 0$. $\quad$ Ainsi $\quad v_{i_0} \neq 0$.
Utilisons l'égalité de **Q32.** pour $i = i_0$ et appliquons l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda a_{i_0i_0}v_{i_0}| \leqslant \left|\sum_{j=i_0+1}^{n} a_{i_0j}v_j\right| + |\lambda| \left|\sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0j}v_j\right|$$

$$|\lambda a_{i_0i_0}|\ |v_{i_0}| \leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0j}||v_j| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0j}||v_j|$$

$|v_{i_0}| > 0 \quad$ donc

$$|\lambda a_{i_0i_0}| \leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0j}|\ \frac{|v_j|}{|v_{i_0}|} + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0j}|\ \frac{|v_j|}{|v_{i_0}|}$$

Par définition de i_0, $\quad \forall\, j \in [\![1,n]\!], \quad \dfrac{|v_j|}{|v_{i_0}|} \leqslant 1 \quad$ et on manipule des termes positifs donc

$$\boxed{|\lambda a_{i_0i_0}| \leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0j}|}$$

Q34. Si $\quad \lambda = 0$, $\quad$ on a bien $\quad |\lambda| < 1$.
Sinon, A étant une matrice à diagonale strictement dominante, on a :

$$|\lambda|\ |a_{i_0i_0}| > |\lambda| \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0j}| = |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0j}| + |\lambda| \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0j}|$$

Q33. permet de déduire :

$$\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0j}| > |\lambda| \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0j}|$$

Et $\quad \displaystyle\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0j}| > 0 \quad$ car sinon, on aurait $\quad 0 > 0 \quad$ donc en simplifiant, on obtient

$$\boxed{|\lambda| < 1}$$

Les valeurs propores de B sont donc toutes de module strictement inférieur à 1.
Par conséquent la **partie II** permet de conclure que

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} B^k = 0.}$$

Q35. Montrons le résultat par récurrence. On note pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{H}_k : X_k - X = B^k(X_0 - X)$.

- Initialisation : $\mathscr{H}_0$ est clairement vraie.
- Hérédité : Supposons $\mathscr{H}_k$ vraie à un rang fixé k et montrons que $\mathscr{H}_{k+1}$ est vraie.
  Par définition de la suite et par **Q31.**, on a :

  $$X_{k+1} - X = (BX_k + M^{-1}Y) - (BX + M^{-1}Y) = B(X_k - X)$$

  Donc par HR_k, $X_{k+1} - X = B^{k+1}(X_0 - X)$ et $\mathscr{H}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion : On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad X_k - X = B^k(X_0 - X)}$$

De plus, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie et l'application $\psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longmapsto M(X_0 - X)$ est linéaire donc elle est continue (en 0). Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} B^k = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} \psi(B^k) = \psi(0) = 0$.
Ainsi :

$$\lim_{k\to+\infty} (X^k - X) = 0.$$

$$\boxed{\text{La suite} \quad (X_k)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{converge donc bien vers } X.}$$