N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 09
Limites et intégrales

1 Suites d'intégrales

Proposition 1 (Rappel)

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux qui converge uniformément vers f sur **le segment** $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt.$$

Proposition 2 (Théorème de convergence dominée (de Lebesgue))

Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur I vérifiant :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction φ intégrable sur I, **indépendante de** n, vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathrm{I},\ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x),$$

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et : $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f_n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t.$

Remarque 3

- Dans plusieurs situations, lorsque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers la fonction nulle, la fonction φ sera la fonction f.
- Lorsqu'on a une intégrale sur un segment, comme $\displaystyle\int_{]0,1[} f_n = \int_{[0,1]} f_n$, il n'est pas utile d'étudier précisément la convergence de la suite de fonctions (f_n) aux bornes de I.
- Lorsqu'on a à déterminer une limite d'une suite d'intégrales du type $\displaystyle\int_0^n f_n(t)dt$, il peut être très intéressant d'introduire la suite de fonctions $g_n = \mathbb{1}_{[0,n]} f_n$.

2 Séries et intégrales

Proposition 4 (Rappel)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur le **segment** $[a, b]$, telle que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\sum \int_a^b u_n(t)dt$ converge et

$$\int_a^b \sum_{n\geqslant 0} u_n(t)dt = \sum_{n\geqslant 0} \int_a^b u_n(t)dt.$$

Proposition 5 (Théorème d'intégration terme à terme)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux. Si

- pour tout n, u_n est intégrable sur I,
- $\sum u_n$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I,
- la série $\sum \int_{\mathrm{I}} |u_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge,

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I et : $\int_{\mathrm{I}} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\mathrm{d}t$.

Remarque 6

Parfois, lorsque le théorème d'intégration terme à terme ne fonctionne pas, il peut être utile de faire un théorème de convergence dominée sur les sommes partielles. Ce genre de situation arrive lorsque le signe de $f_n(t)$ dépend de n ou que f_n est à valeurs complexes.

3 Intégrales à paramètres

Définition 7

On appelle « intégrale à paramètre » toute fonction de la forme

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} A \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x,t)dt, \end{array} \right.$$

où f est une fonction de deux variables, définie sur $A \times \mathrm{I}$, telle que, pour tout x, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux, intégrable sur I.

Proposition 8 (Théorème de continuité des intégrales à paramètre)

Si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times \mathrm{I}$, telle que :

- pour tout $t \in \mathrm{I}, x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A,
- pour tout $x \in A, t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction φ intégrable sur I, **indépendante de x,** telle que pour tout $(x,t) \in A \times \mathrm{I}$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$,

alors la fonction $x \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Remarque 9

On peut chercher à faire une domination **sur tout segment** : on remplace la dernière hypothèse par « il existe une fonction φ intégrable sur I, **indépendante de x,** telle que pour tous $a < b$ dans A, pour tous $(x,t) \in [a,b] \times \mathrm{I}$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ » .

Proposition 10 (Théorème de convergence dominée à paramètre continu)

Si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times \mathrm{I}$ telle que :

- pour tout $t \in \mathrm{I}$, $f(x,t) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell(t)$,
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I,
- il existe une fonction φ intégrable sur I, **indépendante de x,** telle que pour tout $(x,t) \in A \times \mathrm{I}$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$,

alors ℓ est intégrable sur I et :

$$\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t \underset{x \to a}{\longrightarrow} \int_{\mathrm{I}} \ell(t)\mathrm{d}t.$$

Proposition 11 (Théorème de dérivation des intégrales à paramètres)

Si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times \mathrm{I}$, telle que :

- pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A,
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I,
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction φ intégrable sur I, **indépendante de x,** telle que pour tout $(x,t) \in A \times \mathrm{I}$, on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$,

alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Proposition 12 (Théorème de classe $\mathscr{C}^k$ des intégrales à paramètres)

Si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times \mathrm{I}$, telle que :

- pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A,
- pour tout j dans $[\![0, k-1]\!]$, pour tous $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I,
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction φ intégrable sur I, **indépendante de x,** telle que pour tout $(x,t) \in A \times \mathrm{I}$, on ait $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$,

alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A et vérifie :

$$\forall j \in [\![1, k]\!],\ \forall x \in A, \quad g^{(j)}(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Remarque 13

- On peut faire une domination **sur tout segment** plutôt que sur I tout entier.
- Pour la classe $\mathscr{C}^\infty$, il suffit d'appliquer le théorème de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout k. Si on veut le reformuler, on peut écrire le théorème qui suit.

Proposition 14 (Théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$ des intégrales à paramètres)

Si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times \mathrm{I}$, telle que :

- pour tout $t \in \mathrm{I}, x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur A,
- pour tout k dans $[\![0, k-1]\!]$, pour tous $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I, et il existe une fonction φ_k intégrable sur I, **indépendante de** x**,** telle que pour tout $(x,t) \in A \times \mathrm{I}$, on ait $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_k(t)$,

alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur A et vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in A, \quad g^{(k)}(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t.$$