 nlaillet.math@gmail.com

Semaine 11 – Colle du lundi 16/12 à 8h

<table>
<tr><th>Nom</th><th>Énoncé et commentaires</th><th>Note</th></tr>
<tr><td></td><td>

Colle Python. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

1. **[Py]** Calculer avec python le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? Vérifier que la matrice n'a qu'une valeur propre réelle : l'identifier. Que dire du module de ses valeurs propres non réelles ? *Remarque : si `T` est un tableau numpy, taper `np.round(T,2)` permet d'arrondir les résultats du tableau.*

Pour le moment, on admet les résultats conjecturés ci-dessus.
On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, $u_2 = 8$, $u_3 = 4$, $u_4 = 11$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+5} = \frac{1}{5}\left(u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4}\right).$$

2. **[Py]** Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et renvoie les $n+1$ premiers termes de cette suite.
3. **[Py]** Afficher les valeurs des 25 premiers termes de la suite. Que peut-on conjecturer concernant la convergence de u_n ?
4. Réécrire la relation de récurrence à l'aide de la matrice A. On introduira le vecteur $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \\ u_{n+4} \end{pmatrix}$.
5. Montrer que les coefficients de la matrice $(A^n)_n$ convergent vers les coefficients de la matrice d'un projecteur dont on précisera les éléments caractéristiques.
6. Trouver un vecteur non nul X tel que $A^\top X = X$.
7. Démontrer les résultats conjecturés au tout début de l'exercice.

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

1. **Cours.** Si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.
2. Soient A, B et C trois matrices vérifiant $AB - BA = C$, $AC = CA$ et $BC = CB$.
   (a) On suppose C diagonalisable. Montrer que C est nulle.
   (b) On suppose A diagonalisable.
      i. Montrer que pour tout polynôme P, $P(A)B - BP(A) = P'(A)C$.
      ii. Montrer que C est nulle.

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

1. **Cours.** Si P annule u, alors le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de u.
2. Soit A $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\{B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}),\ AB = BA\}$.
3. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u, v des endomorphismes de E tels qu'il existe $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ vérifiant $u \circ v - v \circ u = au + bv$. On suppose dans les quatre premières questions que $b = 0$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, u$ est stable par v.
   (b) On pose $\varphi : f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \to f \circ v - v \circ f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1, \varphi(u^n) = anu^n$.
   (c) Montrer qu'il existe un entier n tel que $u^n = 0$.
   (d) Montrer que u et v admettent un vecteur propre commun.
   (e) Dans le cas général, montrer que u et v admettent un vecteur propre commun.

</td><td></td></tr>
</table>