TD 09
Limites et intégrales

1 Intégrales de suites et de séries de fonctions

Exercice 1. *CCINP 24*. Soit, pour tout n, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} t^n dt$.

1. Montrer que pour tout n, l'intégrale est bien définie et donner son signe.

Correction

Notons, pour n dans $\mathbb{N}$ et $t \in]0,1]$, $f_n(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} t^n$

- f_n est continue sur $]0,1]$,
- $-\dfrac{1}{t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ donc $f_n(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, i.e. f_n est prolongeable par continuité en 0,

donc f_n est intégrable sur $[0,1]$, donc I_n est définie.

2. Étudier les variations de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

Soit n dans $\mathbb{N}$. Pour t dans $[0,1]$, $t^{n+1} \leqslant t^n$ donc $f_{n+1}(t) \leqslant f_n(t)$ donc, en intégrant entre 0 et 1, $\mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n$, ce qui assure la décroissance de I_n.

3. Montrer la convergence de I_n et déterminer sa limite.

Correction

On remarque que

- pour tout t dans $]0,1[$, $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $]0,1[$,
- pour tout t dans $]0,1[$, pour tout n dans $\mathbb{N}$,
$$|f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}},$$
indépendante de n et intégrable sur $]0,1[$,

donc, par le théorème de convergence dominée,
$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt = 0.$$

4. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $(n+1)\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n-1} = \mathrm{e}^{-1}$.

Correction

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Alors, dans I_n, on note $u(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}$, donc $u'(t) = \dfrac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}$, et $v'(t) = t^n$, i.e. $v(t) = \dfrac{1}{n+1} t^{n+1}$. Comme le crochet $[u(t)v(t)]_0^1$ converge et que I_n converge, par intégration par parties, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n &= \left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}\frac{t^{n+1}}{n+1}dt \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\mathrm{I}_{n-1},\end{aligned}$$

ce qui est exactement la relation demandée.

5. Montrer que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$.

Correction

On sait que $\mathrm{I}_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{I}_{n-1}}{n+1}$. Or, $\mathrm{I}_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{I}_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-1}$, d'où

$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}.$$

6. Déterminer la nature de la série de terme général I_n.

Correction

Par l'équivalent précédent, et par comparaison à une série de Riemann divergente, la série de terme général I_n diverge.

7. Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^{n-1}\mathrm{I}_n$.

Correction

ATTENTION ! ON NE PEUT PAS faire des équivalents pour des séries alternées, en tout cas pas directement. On sait que

$$(-1)^{n-1}\mathrm{I}_n = \frac{(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}\mathrm{I}_{n-1}}{n+1}.$$

Or, la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-1}}{n+1}$ converge par le critère des séries alternées, et

$$\left|-\frac{(-1)^{n-1}\mathrm{I}_{n-1}}{n+1}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n^2},$$

terme général d'une série convergente, donc la série de terme général $-\dfrac{(-1)^{n-1}\mathrm{I}_{n-1}}{n+1}$ est absolument convergente, donc convergente. Finalement, la série de terme général $(-1)^{n-1}\mathrm{I}_n$ est convergente.

Exercice 2. *Mines-Telecom 24*. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+t^n\right)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale I_n est bien définie.

Correction

Soit n dans $\mathbb{N}$. ALors $t \mapsto \ln(1+t^n)$ est continue sur $[0,1]$ donc I_n est bien définie.

2. Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Correction

On va appliquer un théorème de convergence dominée. Notons pour tous t dans $[0,1]$ et n dans $\mathbb{N}$ $f_n(t) = \ln(1+t^n)$. Alors

- pour tout t dans $[0,1]$, $\ln(1+t^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0,1[\\ \ln(2) \text{ si } t = 1 \end{cases}$
- pour tous t dans $[0,1]$ et n dans $\mathbb{N}$, $|f_n(t)| = |\ln(1+t^n)| \leqslant \ln(2)$, fonction **indépendante de x.**

Donc, par théorème de convergence dominée,

$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt = 0.$$

3. Montrer que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$ (en vérifiant que l'intégrale de droite est définie).

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$n\mathrm{I}_n = n\int_0^1 \ln\left(1+t^n\right)dt.$$

On fait le changement de variables $u = t^n$. L'application $\varphi : t \mapsto t^n$ est une bijection $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $[0,1]$, $\varphi' : t \mapsto nt^{n-1}$ donc

$$\begin{aligned} n\mathrm{I}_n &= \int_0^1 \ln\left(1+t^n\right)\frac{nt^{n-1}}{t^{n-1}}dt \\ &= \int_0^1 \ln(1+\varphi(t))\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^{\frac{n-1}{n}}}dt \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u^{1-\frac{1}{n}}}du. \end{aligned}$$

On pose alors $g_n(u) = \dfrac{\ln(1+u)}{u^{1-\frac{1}{n}}}$. Alors

- g_n est continue sur $]0,1]$, prolongeable par continuité en 0 car

$$g_n(u) \underset{u\to0}{\sim} \frac{u}{u^{1-\frac{1}{n}}} \underset{u\to0}{\sim} u^{\frac{1}{n}} \underset{u\to0}{\longrightarrow} 0.$$

- pour tout u dans $]0,1]$,

$$g_n(u) = \frac{\ln(1+u)}{u^{1-\frac{1}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(1+u)}{u}$$

- pour tout u dans $]0,1]$ et n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|g_n(u)| &= g_n(u)\\ &= \frac{\ln(1+u)}{u}u^{\frac{1}{n}}\\ &\leqslant \frac{\ln(1+u)}{u},\end{aligned}$$

indépendante de n, intégrable sur $[0,1]$ car continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0.

Donc, par le théorème de convergence dominée,

$$n\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}du,$$

ce qui est exactement le résultat désiré !

4. Sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, montrer que $\mathrm{I}_n \sim \dfrac{\pi^2}{12n}$.

Indication : on utilisera le fait que pour tout t dans $[0,1]$, $\ln(1+t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}$.

Correction

On écrit que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}du &= \int_0^1 \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}u^n}{nu}du\\ &= \int_0^1 \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}u^{n-1}}{n}du.\end{aligned}$$

Or, en notant $h_n(u)=\dfrac{(-1)^{n-1}u^{n-1}}{n}$, la série de fonctions $\sum h_n$ converge simplement et

$$\int_0^1\left|\frac{(-1)^{n-1}u^{n-1}}{n}\right|du=\frac{1}{n}\left[\frac{u^n}{n}\right]_0^1=\frac{1}{n^2},$$

donc la série de terme général $\displaystyle\int_0^1|h_n|$ converge donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme,

$$\begin{aligned}\int_0^1\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}u^{n-1}}{n}du &= \sum_{n\geqslant 1}\int_0^1\frac{(-1)^{n-1}u^{n-1}}{n}du\\ &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\frac{u^n}{n}\right]_0^1\\ &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}-\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1-(-1)^{n-1}}{n^2}\\
&= \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n \text{ pair}}}\frac{2}{n^2}\\
&= \sum_{p\geqslant 1}\frac{2}{(2p)^2}\\
&= \sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{2p^2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{p^2},
\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12},$$

d'où le résultat désiré !

Exercice 3. *Saint-Cyr 19*. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$.

1. Calculer u_n avec Python, afficher les valeurs des termes u_n pour n allant de 1 à 10.

Correction

On propose

```python
import numpy as np
import scipy.integrate as integr

def u(n):
    def f(t):
        return t**n*np.exp(-t)
    return integr.quad(f,0,1)[0]

for n in range(1,11):
    print(u(n))
```

On obtient alors

```
>>> (executing cell "" (line 1 of "<tmp 9>"))
0.2642411176571154
0.16060279414278839
0.11392894125692285
0.0878363238562491
0.07130217810980317
0.05993362748737664
0.05165595124019414
0.045368168750110814
0.040434077579554965
0.036461334624107285
```

2. Justifier l'existence de u_n pour tout n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ est continue sur $[0,1]$ donc u_n est bien défini.
Ensuite,

- pour tout n dans $\mathbb{N}$, u_n est continue sur $[0,+\infty[$,
- pour tout x dans $[0,1]$, $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
- pour tout n dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0,1]$, $|x^n e^{-x}| \leqslant 1$, **indépendnate de n.**

Donc, d'après le théorème de convergence dominée, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Donner un encadrement simple de u_n en fonction de n.

Correction

Sur $[0,1]$, $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant 1$, donc

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\mathrm{e}} dx \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 x^n dx,$$

d'où

$$\frac{1}{\mathrm{e}(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

4. En déduire la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{n}$.

Correction

Comme $u_n \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}(n+1)}$ et que la série de terme général $\frac{1}{\mathrm{e}.(n+1)}$ diverge (série de Riemann), par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

Ensuite, comme $0 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{1}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, par comparaison à une série de Riemann, $\sum \frac{u_n}{n}$ diverge.

5. Représenter avec Python les premières valeurs de $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!}$. Conjecture sur la convergence ?

Correction

On propose

```python
def v(n):
    res = 0
    facto = 1
    for k in range(n+1):
        res += u(k)/facto
        facto *= (k+1)
    return res

```

 nlaillet.math@gmail.com

```python
for n in range(20):
    print(v(n))
```

On obtient

```
>>> (executing cell "" (line 1 of "<tmp 9>"))
0.6321205588285578
0.8963616764856732
0.9766630735570674
0.9956512304332212
0.9993110772605649
0.9999052620781466
0.9999885032274346
0.9999987524241093
0.9999998776267073
0.9999999890521856
0.999999999099952
0.9999999999315627
0.9999999999951605
0.9999999999996804
0.9999999999999803
0.999999999999999
1.0
1.0
1.0
1.0
```

On conjecture que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

6. Montrer la conjecture précédente.

 nlaillet.math@gmail.com

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \int_0^1 x^k e^{-x} dx \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-x} \frac{x^k}{k!} dx.\end{aligned}$$

Or, si l'on pose $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \dfrac{x^k}{k!}$, on remarque que

$$\int_0^1 |f_n(x)| dx \leqslant \frac{1}{k!},$$

terme général d'une série convergente, donc $\sum \displaystyle\int_0^1 |f_n(x)| dx$ converge donc, par théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-x} \frac{x^k}{k!} dx \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \frac{x^k}{k!} dx = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x} \mathrm{e}^{x} dx = 1.$$

Exercice 4. *Saint-Cyr 19*. Soit la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t-1}$.

1. Montrer que $\forall t \in]0,1[, \quad f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} -t^n \ln t$.

Correction

Si $t \in]0,1[$, on sait que $\dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} t^n$, donc

$$f(t) = -\frac{\ln(t)}{1-t} = -\sum_{n \geqslant 0} \ln(t).t^n,$$

ce qui est le résultat attendu.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Correction

Il s'agit d'appliquer un théorème d'interversion de série et d'intégrale. Comme le terme $t \mapsto -\ln(t).t^n$ est positif, un théorème d'intégration terme à terme devrait fonctionner. Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 -t^n \ln(t) dt$, on intègre $t \mapsto -t^n$ et on dérive ln, d'où, par intégration par parties,

$$\int_0^1 -t^n \ln(t) dt = \left[-\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln(t) \right] + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2},$$

terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum \displaystyle\int_0^1 |-t^n \ln(t)| dt$ converge, donc, par

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

le théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 -t^n\ln(t)dt = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}.$$

Exercice 5. *Centrale 24*. **1.** On veut montrer la relation suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{ch}(t)}\mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

(a) Justifiez la convergence de l'intégrale.

Correction

La fonction $t \mapsto \mathrm{ch}(t)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $t \mapsto \dfrac{t}{\mathrm{ch}(t)}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
De plus,

$$t^2\frac{t}{\mathrm{ch}(t)} = t^2\frac{2t}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2t^3}{\mathrm{e}^t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $\dfrac{t}{\mathrm{ch}(t)} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, intégrable en $+\infty$, donc l'intégrale converge bien.

(b) Montrer que pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\frac{t}{\mathrm{ch}(t)} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t\mathrm{e}^{-(2n+1)t}$.

Correction

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{t}{\mathrm{ch}(t)} &= \frac{2t}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\\ &= \frac{2t\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\\ &= 2t\mathrm{e}^{-t}\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\mathrm{e}^{-2nt} \text{ car } \mathrm{e}^{-2t} \in]0,1[\\ &= 2\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n t\mathrm{e}^{-(2n+1)t}.\end{aligned}$$

Pour $t = 0$, les deux quantités sont nulles donc la formule a aussi un sens.

(c) Conclure.

Correction

On pose, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto 2(-1)^n t\mathrm{e}^{-(2n+1)t}$. Alors

- $\sum f_n$ converge simplement,
- pour tout n dans $\mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt = 2\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-(2n+1)t}.$$

On fait alors une intégration par parties, en dérivant $u : t \mapsto t$ et en intégrant $v' : t \mapsto \mathrm{e}^{-(2n+1)t}$. Cette intégration par parties est possible car le crochet

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

$\left[-t\dfrac{e^{-(2n+1)t}}{2n+1}\right]_0^{+\infty}$ converge. On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|dt &= \left[-2t\frac{e^{-(2n+1)t}}{2n+1}\right]_0^{+\infty}+\frac{2}{2n+1}\int_0^{+\infty}e^{-(2n+1)t}dt\\ &= 0+\frac{2}{2n+1}\left[-\frac{e^{-(2n+1)t}}{2n+1}\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{2}{(2n+1)^2},\end{aligned}$$

terme général d'une série convergente, par comparaison à une série de Riemann.

Donc, par le théorème d'intégration terme à terme,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{ch}(t)}dt &= \sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}f_n(t)dt\\ &= \sum_{n\geqslant 0}2(-1)^n\int_0^{+\infty}te^{-(2n+1)t}dt\\ &= \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{2}{(2n+1)^2} \text{ par le calcul précédent.}\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré.

2. On veut montrer la relation suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$.

(a) Justifiez la convergence de l'intégrale.

Correction

La fonction $f : t\mapsto \dfrac{\cos(t)}{1+e^t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et

$$\left|\frac{\cos(t)}{1+e^t}\right|\leqslant e^{-t},$$

fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc, par comparaison, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrale converge.

(b) Établir la relation attendue.

On pourra montrer que pour $t>0$, $\dfrac{\cos(t)}{1+e^t}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-nt}\cos(t)$.

Correction

Soit t dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{\cos(t)}{1+\mathrm{e}^t} &= \frac{\cos(t)}{\mathrm{e}^t}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \mathrm{e}^{-(n+1)t}\cos(t) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-nt}\cos(t)\end{aligned}$$

En revanche, la série ne converge pas en $t=0$.
Ensuite, on remarque que le théorème d'intégration terme à terme risque de difficilement s'appliquer : on majore $|\mathrm{e}^{-nt}\cos(t)|$ par e^{-nt}, d'intégrale en $\frac{1}{n}$, terme général d'une série divergente.
On va alors appliquer un théorème de convergence dominée sur les sommes partielles. Notons, pour tout N dans $\mathbb{N}$, pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$S_N(t) = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-nt}\cos(t) = \cos(t)\mathrm{e}^{-t}\frac{1+(-1)^N\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^t}.$$

Alors

- pour tout N, $t\mapsto S_N$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
- pour tout N dans $\mathbb{N}$ et t dans $\mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}|S_N(t)| &= \left|\cos(t)\mathrm{e}^{-t}\frac{1+(-1)^N\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^t}\right| \\ &\leqslant |\cos(t)|\mathrm{e}^{-t},\end{aligned}$$

  fonction intégrable et **indépendante de** N,

donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_{\mathbb{R}_+}\mathscr{S}_N(t)dt \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}_+}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-nt}\cos(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+} f(t)dt.$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}_+}\mathscr{S}_N(t)dt = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\int_{\mathbb{R}_+}\mathrm{e}^{-nt}\cos(t)dt$$

Soit désormais n dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+}\mathrm{e}^{-nt}\cos(t)dt &= \mathfrak{Re}\left(\int_{\mathbb{R}_+}\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{it}dt\right) \\ &= \mathfrak{Re}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{-(n-i)t}}{-n+i}\right]_0^{+\infty}\right) \\ &= \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{n-i}\right) \\ &= \mathfrak{Re}\left(\frac{n+i}{n^2+1}\right) \\ &= \frac{n}{1+n^2},\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathscr{S}_N(t)dt = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{n}{1+n^2},$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{1+n^2} = \int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt.$$

Exercice 6. *CCINP 24*. Pour tous p et n dans $\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^p(\ln x)^n \, dx$.

1. Montrer que les $\mathrm{I}_{n,p}$ sont bien définies.

Correction

Soient n et p dans $\mathbb{N}$. Alors $x \mapsto x^p \ln(x)^n$ est continue sur $]0,1]$, et

$$\sqrt{x}x^p \ln(x)^n \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissances comparées.}$$

Donc $x^p \ln(x)^n \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ d'où, par comparaison à une intégrale de Riemann convergeant en 0, $x \mapsto x^p \ln(x)^n$ est intégrable sur $]0,1]$.

2. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, une relation entre $\mathrm{I}_{n-1,p}$ et $\mathrm{I}_{n,p}$. En déduire une expression de $\mathrm{I}_{n,p}$ pour tous n et p.

Correction

Dans $\mathrm{I}_{n,p}$, on effectue une intégration par parties, en dérivant $x \mapsto \ln(x)^n$ et en intégrant $x \mapsto x^p$:

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{n,p} &= \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\ln(x)^n\right]_0^1 - \frac{n}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}\frac{1}{x}\ln(x)^{n-1}dx \\ &= -\frac{n}{p+1}\mathrm{I}_{n-1,p}.\end{aligned}$$

Par récurrence immédiate, il vient

$$\mathrm{I}_{n,p} = (-1)^n\frac{n(n-1)\dots 1}{(p+1)^n}\mathrm{I}_{0,p} = \frac{(-1)^n n!}{(p+1)^{n+1}}.$$

3. Soit $f : x \in]0,1] \mapsto \dfrac{1}{x^x}$. Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$.

Correction

On écrit que $f : x \mapsto e^{-x\ln(x)}$. Alors f est continue sur $]0,1]$ et $e^{x\ln(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc f est prolongeable par continuité en 0. D'où l'intégrabilité de f sur $[0,1]$.

4. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$.

Correction

On remarque que

$$\forall x>0,\ f(x)=\mathrm{e}^{-x\ln(x)}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^n\ln(x)^n}{n!},$$

quantité aussi définie en 0 en remarquant que $x\ln(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$. Donc, sous réserve de justification,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx&=\int_0^1\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^n\ln(x)^n}{n!}dx\\&=\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\frac{(-1)^n x^n\ln(x)^n}{n!}dx\\&=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n!}\mathrm{I}_{n,n}\\&=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}\\&=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}.\end{aligned}$$

La justification est très simple, comme

$$\int_0^1\left|\frac{(-1)^n x^n\ln(x)^n}{n!}\right|dx=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^n\ln(x)^n dx.$$

En effet, $\ln(x)^n$ est du signe de $(-1)^n$ sur $[0,1]$ (positif si n est pair, négatif si n est impair). Or, on l'a calculé,

$$\int_0^1\left|\frac{(-1)^n x^n\ln(x)^n}{n!}\right|dx=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc la série de terme général $\displaystyle\int_0^1\left|\frac{(-1)^n x^n\ln(x)^n}{n!}\right|dx$ converge, donc, par le théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 f(x)dx=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Exercice 7. *CCINP 23*. Soit $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que I converge.

Correction

Notons $f:t\mapsto\dfrac{\sin(t)}{\operatorname{sh}(t)}$. Alors f est continue sur $]0,+\infty[$. De plus,

- $f(t)\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{t}{t}=1$, donc f est prolongeable par continuité en 0,
- $|f(t)|\leqslant\dfrac{1}{\operatorname{sh}(t)}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{2}{\mathrm{e}^t}$, qui est intégrable en $+\infty$, donc f est intégrable en $+\infty$,

donc I converge.

2. Montrer que :

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t} = 2\mathrm{e}^{-t}\sin t \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2nt}.$$

Correction

Soit $t \in]0,+\infty[$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{\sin(t)}{\operatorname{sh}(t)} &= \sin(t)\frac{2}{\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}}\\ &= \sin(t)\frac{2}{\mathrm{e}^{t}}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2t}}\\ &= 2\sin(t)\mathrm{e}^{-t}\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{e}^{-2nt} \text{ car } \mathrm{e}^{-2t}\in[0,1[.\end{aligned}$$

3. Montrer que :

$$\mathrm{I} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)^2+1}$$

Correction

On veut pouvoir permuter série et intégrale. Effectuons déjà le calcul.
Sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \int_0^{+\infty} 2\sin(t)\mathrm{e}^{-t}\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{e}^{-2nt}dt\\ &= \sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} 2\sin(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-2nt}dt.\end{aligned}$$

Or, $t \mapsto 2\sin(t)e^{-t}e^{-2nt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} 2\sin(t)e^{-t}e^{-2nt}dt &= 2\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-t(2n+1)}dt\\ &= 2\mathfrak{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{it}e^{-t(2n+1)}dt\right)\\ &= 2\mathfrak{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{t(i-(2n+1))}dt\right)\\ &= 2\mathfrak{Im}\left(\left[\frac{e^{t(i-(2n+1))}}{i-(2n+1)}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= 2\mathfrak{Im}\left(\frac{-1}{i-(2n+1)}\right)\\ &= 2\mathfrak{Im}\left(\frac{i(2n+1)}{(2n+1)^2+1}\right)\\ &= \frac{2}{(2n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

Donc si la permutation est licite, on obtient le résultat désiré.
Pour justifier la permutation, le changement de signe du sinus et la manière dont nous avons calculé l'intégrale nous incitent à penser qu'il sera dur d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme. En revanche, si l'on note

$$S_n(t) = 2\sin(t)e^{-t}\sum_{k\geqslant n} e^{-2kt},$$

alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout t dans $\mathbb{R}_+$,

$$S_n(t) \leqslant 2|\sin(t)|e^{-t}\sum_{k\geqslant 0} e^{-2kt} = \frac{|\sin(t)|}{\mathrm{sh}(t)},$$

indépendant de n et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée appliqué aux sommes partielles, on en déduit que

$$\mathrm{I} = \sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} 2\sin(t)e^{-t}e^{-2nt}dt = \sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{(2n+1)^2+1}.$$

4. Montrer que : $\frac{\pi}{4} \leqslant \mathrm{I} \leqslant 1 + \frac{\pi}{4}$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+(2t+1)^2}$ est décroissante et tend vers 0, donc on peut écrire l'inégalité

$$\frac{1}{1+(2(n+1)+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1}\frac{dt}{1+(2t+1)^2} \leqslant \frac{1}{1+(2n+1)^2}$$

D'où, en sommant de 0 à $+\infty$,

$$\frac{\mathrm{I}-1}{2} \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+(2t+1)^2} \leqslant \frac{\mathrm{I}}{2}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+(2t+1)^2} &= \left[\frac{1}{2}\text{Arctan}(2t+1)\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(1)\right)\\ &= \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

D'où l'inégalité $\boxed{\mathrm{I} - 1 \leqslant \frac{\pi}{4} \leqslant \mathrm{I}}$.

2 Intégrales à paramètres

Exercice 8. *CCINP 24*. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de f sur $\mathbb{R}^+$.

Correction

Soit $x \geqslant 0$. Alors

- $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $]0, +\infty[$,
- $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2t^2}\mathrm{e}^{-xt} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, donc l'intégrande est prolongeable par continuité,
- pour tout $t > 0$, $\left|\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$, intégrable en $+\infty$, donc $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable en $+\infty$,

donc f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Correction

On cherche à appliquer un théorème de continuité des intégrales à paramètre. Notons, pour tout $t \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$, $g(x,t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$ (prolongé par continuité par $\dfrac{1}{2}$ en 0. Alors

- pour tout $x \geqslant 0$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$,
- pour tout $t \geqslant 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$,
- pour tout $t \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
|g(x,t)| &= \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt} \\
&= \frac{1-\cos\left(2\frac{t}{2}\right)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt} \\
&= \frac{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\mathrm{e}^{-xt} \\
&\leqslant h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } t \leqslant 1 \\ \dfrac{2}{t^2} & \text{si } t > 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

fonction continue par morceaux, **indépendante de** x et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Donc, par le théorème de continuité des intégrales à paramètre, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction

On applique le théorème de la classe $\mathscr{C}^2$ des intégrales à paramètre.
Remarque : l'intervalle sur lequel montrer la régularité de f incitera à montrer la classe $\mathscr{C}^2$ sur tout segment.
On note toujours $g(x,t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$. Alors

- pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$,
- on a, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$,
  - $x \mapsto g(x,t)$ est continue, intégrable,
  - $x \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x} g(x,t) = -\dfrac{1-\cos(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}$ continue, intégrable car prolongeable par continuité en 0, continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et car $\left|-\dfrac{1-\cos(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant \dfrac{2\mathrm{e}^{-xt}}{t}$, intégrable en $+\infty$,
  - $x \mapsto \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} g(x,t) = (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-xt}$, fonction continue sur $\mathbb{R}_+$
- enfin, on fixe $0 < a < b$. Alors pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, pour tout x dans $[a,b]$,
$$\left|(1-\cos(t))\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant 2\mathrm{e}^{-xt} \leqslant 2\mathrm{e}^{-at},$$
fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$, **indépendante de x.**

Donc, par le théorème de classe $\mathscr{C}^2$ des intégrales à paramètre, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

Correction

On applique le théorème de limite des intégrales à paramètre. Toujours avec $g(x,t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$, on sait que

- pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
- pour tout t dans $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
- on a la domination déjà faite.

Ainsi, par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} 0 dt = 0$.
Ensuite, pour tout $x > 0$,
$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{e}^{-xt} dt.$$
Or, en notant $\varphi(x,t) = \dfrac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{e}^{-xt}$.

- pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
- pour tout t dans $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{e}^{-xt} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
- pour $x \geqslant 1$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\left|\frac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{e}^{-xt}|\right| = \frac{|2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t}\mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-t},$$

intégrable et indépendante de x,

donc, d'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

5. Montrer que $\forall x > 0 \quad f'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$, puis calculer $f(x)$.

Correction

Soit $x > 0$. Alors

$$\begin{aligned} f''(x) &= \int_0^{+\infty} (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-xt}dt \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}dt - \mathfrak{Re}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(i-x)t}dt\right) \\ &= \frac{1}{x} - \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{x-i}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \mathfrak{Re}\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on dispose de $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Mais $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $C = 0$. Donc on dispose de $D \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = x\ln(x) - x - \frac{1}{2}\int_0^x \ln(1+t^2)dt + D$$

Or, en faisant une intégration par parties, en dérivant $u : t \mapsto \ln(1+t^2)$ et en intégrant $v'(t) = 1$, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^x \ln(1+t^2)dt &= \left[\frac{1}{2}t\ln(1+t^2)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt \\ &= \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) - \int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= -x + \mathrm{Arctan}(x), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} f(x) &= x\ln(x) - x - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) + x - \mathrm{Arctan}(x) + D \\ &= x\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \mathrm{Arctan}(x) + D. \end{aligned}$$

Comme $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $D = \dfrac{\pi}{2}$, donc pour tout $x > 0$,

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x).$$

6. Soit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt$. Exprimer I en fonction de $f(0)$ et calculer I.

Correction

On remarque que

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt.$$

On effectue une intégration par parties, en posant $u(t) = 1 - \cos(t)$, donc $u'(t) = \sin(t)$, et $v'(t) = \dfrac{1}{t^2}$, i.e. $v(t) = -\dfrac{1}{t}$. Le crochet $[u(t)v(t)]_0^{+\infty}$ converge (et vaut 0) donc, par intégration par parties,

$$\frac{\pi}{2} = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt,$$

d'où la valeur de l'intégrale !

Exercice 9. *CCINP 24*. On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt$.

1. (a) Montrer que f est bien définie sur $[0, +\infty[$.

Correction

C'est presque la fonction gamma...
Soit $x \in [0, +\infty[$. Alors $x \mapsto t^x \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, \infty[$, et, par croissances comparées, $t^2 t^x \mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $t^x \mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto t^x \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Ainsi, f est bien définie sur $[0, +\infty[$>

(b) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

Correction

On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètre. On note, pour x et t positifs, $g(x, t) = t^x e^{-t}$.

- pour tout t dans $[0, +\infty[$, $x \mapsto g(x, t)$ est continue,
- pour tout x dans $[0, +\infty[$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue (et intégrable),
- on fixe $a > 0$. Pour tous x dans $[0, a]$ et pour tout t dans $[0, +\infty[$,

$$|g(x, y)| \leqslant h(t), \text{ où } h : t \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} \text{ si } t \leqslant 1 \\ t^a \mathrm{e}^{-t} \text{ si } t \geqslant 1, \end{cases}$$

fonction **indépendante de** x et intégrable sur $[0, +\infty[$ (continue sur $[0, +\infty[$ et égale à un petit o de $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ par croissances comparées), donc, par théorème de continuité des intégrales à paramètres, f est continue sur $[0, +\infty[$.

(c) Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[\quad f(x) = x f(x - 1)$.

Correction

Soit $x \in [1, +\infty[$. Alors dans l'expression

$$\int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t} dt,$$

on dérive $u(t) = t^x$ et on intègre $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$, i.e. $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$. Par intégration par parties, on obtient, comme le crochet $[u(t)v(t)]_0^{+\infty}$ converge,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t} dt &= \left[-t^x \mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt \\ &= x f(x-1).\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré.

2. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad v_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \ln(f(t))\mathrm{d}t$ et on veut étudier la convergence de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{v_n}$.

(a) Soit $\ell : x \mapsto \displaystyle\int_{x-1}^{x} \ln(f(t))\mathrm{d}t$. Montrer que ℓ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer ℓ'.

Correction

Notons F une primitive de $t \mapsto \ln(f(t))$ (qui existe par le théorème fondamental de l'analyse, étant donné que f est continue et strictement positive). Alors pour tout $x \geqslant 1$, $\ell(x) = F(x) - F(x-1)$, donc ℓ est dérivable et pour tout $x \geqslant 1$,

$$\ell'(x) = F'(x) - F'(x-1) = \ln(f(x)) - \ln(f(x-1)) = \ln(xf(x-1)) - \ln(f(x-1)) = \ln(x).$$

(b) Déterminer la limite de ℓ en $+\infty$.

Correction

On déduit de la question précédente qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant 1$,

$$\ell(x) = x\ln(x) - x + C \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

(c) En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{v_n}$.

Correction

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante (car ℓ croît) et tend vers 0 (car $\ell(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$) donc, par le critère des séries alternées, la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{v_n}$ converge.

Exercice 10. *Mines-Ponts 23*. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et, pour $x \geqslant 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}\mathrm{d}t$.

1. Montrez que F est bien définie.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Soit $x \geqslant 0$. Alors $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}},$$

fonction intégrable en $+\infty$. Donc F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Déterminez une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par F sur $]0, +\infty[$.

Correction

On montre déjà que F est dérivable sur $]0, +\infty[$. Il s'agit d'appliquer un théorème de dérivation des intégrales à paramètre. On note $f(x, t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}$. Alors

- pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et intégrable. En effet,

$$\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ et } \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^{3/2}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right),$$

  d'où l'intégrabilité par comparaison à des intégrales de Riemann convergentes.
- pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{-t\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)},$$

- pour tout $x > 0$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$,
- soit $a > 0$. Alors pour tout t dans $]0, +\infty[$ et x dans $[a, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| &= \left|\frac{-t\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}\right| \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-at}\frac{\sqrt{t}}{t+1}, \end{aligned}$$

  fonction **indépendante de** x et intégrable sur $\mathbb{R}$. En effet, $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}\dfrac{\sqrt{t}}{t+1}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et

$$\mathrm{e}^{-at}\frac{\sqrt{t}}{t+1} \underset{t\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{-at}),$$

  qui est une fonction intégrable.

Donc, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sqrt{t}}{t+1}dt.$$

Ensuite, on remarque que

$$\begin{aligned}
F(x) - F'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)} + \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sqrt{t}}{t+1} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}(1+t)}{\sqrt{t}(t+1)} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}} dt \\
&=_{u=xt} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{I}.
\end{aligned}$$

3. Calculez $F(0)$ et $\lim\limits_{+\infty} F(x)$.

Correction

On effectue le changement de variables $u = \sqrt{t}t$, bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$:

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2u \ \mathrm{d}u}{u\,(1+u^2)} = [2\mathrm{Arctan} u]_0^{+\infty} = \pi$$

Ensuite, on peut faire un théorème de convergence dominée à paramètre continu pour la limite ou juste remarquer que pour $x > 0$,

$$0 \leqslant |F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)} \right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} = \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

4. En déduire la valeur de I.

Correction

On résout l'équation différentielle $y' - y = -\dfrac{\mathrm{I}}{\sqrt{x}}$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\{x \mapsto C\mathrm{e}^x, \ C \in \mathbb{R}\}$$

Ensuite, on prend φ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\psi : x \mapsto \varphi(x)\mathrm{e}^x$. Alors ψ est solution particulière de l'équation non homogène si et seulement si

$$\mathrm{e}^x \varphi'(x) = -\frac{\mathrm{I}}{\sqrt{x}},$$

i.e. $\varphi'(x) = -\dfrac{\mathrm{I}\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$. Ainsi, **une solution particulière** de l'équation est

$$x \mapsto -\mathrm{I}\mathrm{e}^x \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

On en déduit que l'on dispose de C dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$,

$$F(x) = C\mathrm{e}^x - \mathrm{I}\mathrm{e}^x \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

Or, $F(0) = \pi$ donc $C = \pi$. Mais, comme $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que

$$C - \mathrm{I}\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} C - \mathrm{I}^2,$$

on en déduit que $C - \mathrm{I}^2 = 0$, i.e. $\mathrm{I} = \sqrt{C}$, i.e. $\mathrm{I} = \sqrt{\pi}$.

5. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Correction

Finalement, en effectuant le changement de variables $u = t^2$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, on remarque que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\mathrm{I}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 11. *Mines 2024*. On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\left(t^2+1\right)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Que vaut $f(0)$?

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $t \mapsto \dfrac{e^{-\left(t^2+1\right)x^2}}{t^2+1}$ est continue sur $[0, 1]$, donc $f(x)$ est bien définie.
Ensuite, si $x \in \mathbb{R}$, alors

$$f(-x) = \int_0^1 \frac{e^{-\left(t^2+1\right)(-x)^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{e^{-\left(t^2+1\right)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = f(x),$$

donc f est paire.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

Correction

Il s'agit d'effectuer un théorème de dérivation des intégrales à paramètre. On note $h(x, t) = \dfrac{e^{-\left(t^2+1\right)x^2}}{t^2+1}$.

- pour tout x dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue et intégrable.
- pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto h(x, t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(t^2+1)x^2}.$$

- soit $a > 0$. Pour tout x dans $[-a, a]$,

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant 2ae^{-(t^2+1)x^2} \leqslant 2a,$$

indépendante de x et intégrable sur $[0, 1]$.

 nlaillet.math@gmail.com

Donc, par le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, f est dérivable sur tout $[-a,a]$, donc sur $\mathbb{R}$ et pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}\,dt.$$

3. Montrer que g est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction

Par le théorème fondamental du calcul intégral, g est une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ donc g est dérivable et pour tout x dans $\mathbb{R}$, $g'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, qui est continue, donc g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

4. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2g'(x)g(x)$.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}dt \\ &= -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2x^2}x\,dt \\ &=_{u=tx} -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}du \\ &= -2g'(x)g(x). \end{aligned}$$

5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\pi}{4} - g(x)^2$.

Correction

On déduit de la question précédente, en intégrant, qu'il existe une constante C telle que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f(x) = -(g(x))^2 + C.$$

Or, $g(0) = 0$ et $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$, donc $C = \dfrac{\pi}{4}$. D'où le résultat !

6. En déduire la limite de g en $+\infty$ puis conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction

Il s'agit d'appliquer un théorème de convergence dominée à paramètre continu. On note toujours $h(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}dt$.

- pour tout x dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
- pour tout t dans $[0,1]$, $h(x,t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
- pour tout x dans $\mathbb{R}$ et t dans $[0,1]$,

$$|h(x,t)| \leqslant 1,$$

fonction intégrable sur $[0,1]$ **et indépendante de** x,

donc, d'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 0dt = 0.$$

On en déduit que $(g(x))^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$ et donc, par positivité de g, que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On vient de calculer l'intégrale de Gauss !

Exercice 12. *Mines-Ponts 24*. Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$

1. Déterminer le domaine de définition I de F.

Correction

Déjà, si $x<0$, $\frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{e}^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc l'intégrale ne converge pas.

Ensuite, si $x=0$, $\frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{e}^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\sim} t$, non intégrable en $+\infty$.

Enfin, si $x>0$:

- $t \mapsto \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$,
- $\frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{e}^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\sim} t\mathrm{e}^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, intégrable en $+\infty$ par comparaison à une intégrale de référence.

Donc F est définie sur $\mathrm{I} =]0,+\infty[$.

2. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur I et donner son sens de variation.

Correction

Il s'agit d'appliquer un théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre. Notons pour tout $x>0$ et $t\geqslant 0$, $f(x,t) = \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{e}^{-xt}$. Alors

- pour tout $x>0$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux, et intégrable,
- pour tout $t\geqslant 0$, $x\mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-t^4}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{e}^{-xt}.$$

- soient $0<a<b$, x dans $[a,b]$ et $t\geqslant 0$. Alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| &= \frac{t^4}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{e}^{-xt}\\ &\leqslant= \frac{t^4}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{e}^{-at},\end{aligned}$$

indépendante de x et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car égal à $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$).

Donc, par le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, donc, comme a et b ont été choisis arbitraires sur $]0,+\infty[$, $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{t^4}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt} dt < 0,$$

donc F décroît.

3. Déterminer les limites de F aux bornes de I.

Correction

En $+\infty$, on applique un théorème de convergence dominée à paramètre continu :

- pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$,
- pour tout $t \geqslant 0$, $f(x,t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
- pour tout $t \geqslant 0$ et $x > 1$,

$$|f(x,t)| \leqslant \frac{t^4}{\sqrt{1+t^4}} e^{-t},$$

intégrable et indépendante de x. Donc, par le théorème de la double limite, $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ensuite, pour la limite en 0, on veut dire que F va tendre vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} dt = +\infty$...
Pour ce faire, on minore

$$\begin{aligned} F(x) &\geqslant \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &=_{u=xt} \frac{1}{x^4}\int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} du \\ &= \frac{6}{x^4} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty, \end{aligned}$$

(le calcul s'est fait avec 3 IPP que l'on n'a pudiquement pas faites). D'où la limite désirée.

4. Calculer $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

Correction

On a essentiellement fait le calcul (avec 3 IPP) :

$$G(x) = \frac{6}{x^4}.$$

5. Montrer que $F(x) \sim \dfrac{6}{x^4}$ quand x tend vers $+\infty$. (On pourra majorer $|F - G|$)

Correction

Le but est de démontrer que $|F(x)-G(x)| \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$. On calcule, pour $x>0$:

$$\begin{aligned}
G(x)-F(x) &= \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} - \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt} dt \\
&= \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} \frac{\sqrt{1+t^4}-1}{\sqrt{1+t^4}} dt \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} \frac{\frac{t^4}{2}}{\sqrt{1+t^4}} dt \text{ car, par concavité, } \sqrt{1+a} \leqslant 1+\frac{a}{2} \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} \frac{t^7}{2} e^{-xt} dt \\
&=_{u=xt} \frac{1}{x^8} \int_0^{+\infty} \frac{u e^{-u}}{2} du \\
&\underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^4}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat désiré.

Exercice 13. *Navale 22*. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t\,(1+t^2)} \mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition D de F.

Correction

On montre que F est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors

- $t \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t\,(1+t^2)}$ est continue sur $]0,+\infty[$,
- $\dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t\,(1+t^2)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{xt}{t\,(1+t^2)} = \dfrac{x}{(1+t^2)}$, donc $t \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t\,(1+t^2)}$ est prolongeable par continuité en 0,
- $\left|\dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t\,(1+t^2)}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2t(1+t^2)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2t^3}$, intégrable en $+\infty$,

donc $t \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t\,(1+t^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D, calculer $F'(x)$, en déduire $F(x)$.

Correction

Il s'agit d'appliquer un théorème de classe $\mathscr{C}^1$ d'intégrales à paramètre. Notons $f(x,t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t\,(1+t^2)}$. Alors

- pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t\,(1+t^2)}$ est continue, intégrable,
- pour tout $t>0$, $x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t\,(1+t^2)}$ est dérivable, de dérivée

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(1+x^2t^2)t(1+t^2)} = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)},$$

- soit x dans $\mathbb{R}$ et $t > 0$. Alors

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2},$$

fonction **indépendante de** x, continue sur $]0,+\infty[$, intégrable sur $]0,+\infty[$,

donc, par le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\,dt.$$

Ensuite, on remarque que pour $x \neq \pm 1$.

$$\frac{x^2-1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2}.$$

On en déduit que pour $x \neq \pm 1$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{x^2-1}\left[x\mathrm{Arctan}(xt)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x^2-1}\left[\mathrm{Arctan}(t)\right]_0^{+\infty}. \end{aligned}$$

Si $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2(x+1)}.$$

Si $x < 0$,

$$F'(x) = \frac{1}{x^2-1}\left(-\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2)(x-1)} = \frac{\pi}{2(1-x)}.$$

Dans tous les cas

$$F'(x) = \frac{\pi}{2(1+|x|)}.$$

Par continuité de F' sur $\mathbb{R}$, l'expression trouvée est aussi valable en ± 1. On trouve ensuite une expression pour F sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et on recolle en 0.

- sur $\mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$ donc on dispose de C tel que pour tout $x > 0$, $F(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x) + C$. Comme $F(0) = 0$, $C = 0$,
- sur $\mathbb{R}_-^*$, $F'(x) = \dfrac{\pi}{2(1-x)}$ donc on dispose de C tel que pour tout $x < 0$, $F(x) = -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-x) + C$ et $F(0) = 0$ donc $C = 0$.

Donc

$$F : x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-x) \text{ si } x < 0, \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x) \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

Ceci est cohérent car F est impaire (on aurait d'ailleurs pu faire cette remarque dès le début !)

Exercice 14. *ENSEA 23, Mines 24*. On considère $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction

On note $f(x,t) = \cos(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}$. On veut appliquer un théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre.

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \cos(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\left|\cos(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$, intégrable en $+\infty$ donc $t \mapsto \cos(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
- pour tout t dans $[0,+\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2t\sin(2xt)\mathrm{e}^{-t^2},$$
- pour tout x dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$,
- pour tout t dans $[0,+\infty[$ et $x \in \mathbb{R}$,
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 2t\mathrm{e}^{-t^2},$$
indépendante de x et intégrale sur $[0,+\infty[$ (car continue sur $[0,+\infty[$ et $\underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc intégrable en $+\infty$).

Donc, d'après le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par F.

Correction

Par la question précédente, on en déduit que pour tout x dans $\mathbb{R}$,
$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -2t\sin(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}dt.$$
On effectue alors une intégration par parties, en posant $u(t) = \sin(2xt)$, $u'(t) = 2x\cos(2xt)$, $v(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$, $v'(t) = -2t\mathrm{e}^{-t^2}$. On obtient alors
$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[\sin(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x\cos(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}dt \\ &= -2xF(x), \end{aligned}$$
donc $F'(x) + 2xF(x) = 0$.

3. En déduire l'expression de F. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction

Par la question précédente, on dispose alors de C dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout x dans $\mathbb{R}$,
$$F(x) = C\mathrm{e}^{-x^2}.$$
Mais $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc pour tout x dans $\mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Exercice 15. *CCINP 24*. Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $b \in \mathbb{R}$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-at}}{t} \cos(bt) dt$.

1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Correction

Soit $x \in]0, +\infty[$. On note $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{e^{-xt} - e^{-at}}{t} \cos(bt)$. Alors

- φ_x est continue sur $]0, +\infty[$,
- $\dfrac{e^{-xt} - e^{-at}}{t} \cos(bt) \underset{t\to 0}{=} \dfrac{1 - xt - 1 + at + o(t)}{t}(1 + o(1)) \underset{t\to 0}{\sim} a - x$, donc φ_x est prolongeable par continuité en 0.
- pour tout $t > 0$,
$$|\varphi_x(t)| \leqslant e^{-xt} + e^{-at},$$
somme de deux fonctions intégrables en $+\infty$, donc φ_x est intégrable en $+\infty$.

g est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer g'.

Correction

Il s'agit d'appliquer le théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$ des intégrales à paramètre. Notons $f(x, t) = \dfrac{e^{-xt} - e^{-at}}{t} \cos(bt)$, pour $(x, t) \in]0, +\infty[^2$. Alors

- pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue, intégrable sur $]0, +\infty[$,
- pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout k dans $\mathbb{N}^*$,
$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (-1)^k t^{k-1} e^{-xt} \cos(bt),$$
- (domination) soient $(c, s) \in]0, +\infty[$ tels que $c < d$. Alors pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, pour tout $t > 0$, pour tout $x \in [c, d]$,
$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)\right| \leqslant t^{k-1} e^{-ct},$$
fonction intégrable sur $]0, +\infty[$ (continue sur $[0, +\infty[$ et $\underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc intégrable en $+\infty$) et **indépendante de** x**.**

Donc, par le théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$ des intégrales à paramètre, g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur tout segment de $]0, +\infty[$ donc g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{-xt}\cos(bt)dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{e}^{ibt}dt\right)dt \\
&= -\mathfrak{Re}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(ib-x)t}dt\right) \\
&= -\mathfrak{Re}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(ib-x)t}}{ib-x}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= -\mathfrak{Re}\left(-\frac{1}{ib-x}\right) \\
&= -\mathfrak{Re}\left(-\frac{-ib-x}{b^2+x^2}\right) \\
&= -\frac{x}{x^2+b^2}.
\end{aligned}$$

3. En déduire g.

Correction

On en déduit que

$$\begin{aligned}
g(x) &= g(a) + \int_a^x g'(u)du \\
&= 0 - \int_a^x \frac{u}{u^2+b^2}dx \\
&= -\left[\frac{1}{2}\ln(u^2+b^2)\right]_a^x \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a^2+b^2}{x^2+b^2}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 16. *CCINP 24*. Soit $b > 0$. On pose : $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-bt}dt$ pour $x > 0$.

1. I est-elle bien définie ? Continue ? Que dire de $I(0)$?

Correction

Soit $x > 0$. Alors

- $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-bt}$ est continue sur $]0, +\infty[$,
- $\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-bt} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, donc l'intégrande est prolongeable par continuité en 0,
- $\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-bt} \underset{t\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{-bt})$, intégrable en $+\infty$,

donc I est bien définie pour $x > 0$.
On va faire les questions dans le désordre. On remarque que $\mathrm{I}(0)$ est tout à fait définie

car $t \mapsto \dfrac{e^{-bt}}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 (intégrale de Riemann). On montre donc que I est continue sur $\mathbb{R}_+$. On note $f(x,t) = \dfrac{e^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}} e^{-bt}$. Alors

- pour tout $x \geqslant 0$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$,
- pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$,
- soit $t > 0$ et $x \geqslant 0$. Alors

$$|f(x,t)| = \frac{e^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}} e^{-bt} \leqslant \frac{e^{-bt}}{\sqrt{t}},$$

continue sur $]0,+\infty[$ et intégrable sur le même intervalle.

Donc, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, I est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction

On veut appliquer un théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre.

- pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$,
- pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{1}{t}\frac{e^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}} e^{-bt} = -\frac{e^{-\frac{x}{t}}}{t\sqrt{t}} e^{-bt},$$

- pour tout $x > 0$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$,
- soit $a > 0$. Soit $x \in [a,+\infty[$ et $t \geqslant 0$. Alors

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| &= \frac{e^{-\frac{x}{t}}}{t\sqrt{t}} e^{-bt} \\ &\leqslant \frac{e^{-\frac{a}{t}}}{t\sqrt{t}} e^{-bt} = h(t), \end{aligned}$$

fonction **indépendante de** x et intégrable en 0 : en effet, par croissances comparées,

$$\frac{e^{-\frac{a}{t}}}{t\sqrt{t}} = \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-a\frac{1}{t}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc h est prolongeable par continuité en 0, et $h(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$, intégrable en $+\infty$.

Donc, d'après le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre, I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$\mathrm{I}'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{t}}}{t\sqrt{t}} e^{-bt} dt.$$

3. Montrer que pour $x > 0$: $\mathrm{I}(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{u^2}} e^{-bu^2}\, du \quad , \quad \mathrm{I}'(x) = \int_0^{+\infty} -2\frac{e^{-\frac{x}{u^2}} e^{-bu^2}}{u^2}\, du.$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Soit $x > 0$. Dans I, on pose $\varphi(t) = \sqrt{t}$, bijection $\mathscr{C}^1$ de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$. Alors, par la formule de changement de variables,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-bt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\varphi(t)^2}} \mathrm{e}^{-b\varphi(t)^2} 2\varphi'(t) dt \\ &= 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{u^2}} \mathrm{e}^{-bu^2} du.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}'(x) &= -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{t}}}{t\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-bt} dt \\ &= -2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{\varphi(t)^2}}}{\varphi(t)^2} \mathrm{e}^{-b\varphi(t)^2} \varphi'(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} -2\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{u^2}} \mathrm{e}^{-bu^2}}{u^2} \, \mathrm{d}u.\end{aligned}$$

4. Montrer à l'aide d'un changement de variable judicieux que : $\forall x > 0, \quad \mathrm{I}'(x) = -\sqrt{\frac{b}{x}}\mathrm{I}(x)$

Correction

On pose $\psi(u) = \sqrt{\frac{x}{b}}\frac{1}{u}$. Alors $\psi'(u) = -\sqrt{\frac{x}{b}}\frac{1}{u^2}$. Donc ψ est une bijection $\mathscr{C}^1$ **décroissante** et

$$\begin{aligned}\mathrm{I}'(x) &= \int_0^{+\infty} -2\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{u^2}} \mathrm{e}^{-bu^2}}{u^2} \, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-b\psi(u)^2} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\psi(u)^2}} \sqrt{\frac{b}{x}} \psi'(u) \, \mathrm{d}u \\ &= -\sqrt{\frac{b}{x}}\mathrm{I}(x), \text{ le signe } - \text{ venant de la décroissance.}\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré.

5. En déduire l'expression de I.

Correction

I est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}}y = 0$, donc on dispose de $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$,

$$\mathrm{I}(x) = C\mathrm{e}^{2\sqrt{b}\sqrt{x}}.$$

 nlaillet.math@gmail.com

Or,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(0) &= 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-bu^2}\,du \\
&=_{s=\sqrt{b}u} \frac{2}{\sqrt{b}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\,ds \\
&= \frac{2}{\sqrt{b}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}},
\end{aligned}$$

ce dernier résultat venant de la valeur de l'intégrale de Gauss (hors programme !) donc pour tout $x > 0$,

$$\boxed{\mathrm{I}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}}\mathrm{e}^{2\sqrt{b}\sqrt{x}}}$$

3 Grands classiques

Exercice 17. *Grands classiques – la fonction gamma comme limite uniforme*. On définit, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$.

1. Démontrer que Γ est définie sur $]0, +\infty[$.

Correction

Soit $x > 0$. Alors

- $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$,
- $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$, et $1 - x < 1$, donc $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable en 0,
- $t^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = t^{2+x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, donc $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, intégrable en $+\infty$ par comparaison à une intégrale de Riemann.

Donc Γ est définie sur $]0, +\infty[$.

On fixe $x > 0$. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant n, \text{ et } f_n(t) = 0 \text{ si } t \geqslant n.$$

2. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} = f(t)$ et que pour tout n, $0 \leqslant f_n \leqslant f$.

Correction

Soit $t \geqslant 0$. Soit $N > t$. Alors pour tout $n \geqslant N$,

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \\ &= e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} t^{x-1} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} e^{n\left(-\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} t^{x-1} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} e^{-t+o(1)} t^{x-1} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-t} t^{x-1}. \end{aligned}$$

On a alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout t dans $[0, n]$,

$$|f_n(t)| = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} t^{x-1} \leqslant e^{n\times\left(-\frac{t}{n}\right)} t^{x-1} = f(t),$$

et la majoration est encore plus évidente si $t > n$.

3. Démontrer que, pour n dans $\mathbb{N}$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

Correction

On calcule

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt &= \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt \\ &=_{u=\frac{t}{n}} \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n du \\ &= n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du. \end{aligned}$$

Dans $\displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}du$, on dérive $u \mapsto (1-u)^n$ et on intègre $u \mapsto u^{x-1}$; on remarque que le crochet est nul d'où

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du &= \frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1} u^x du \\ &= \frac{n(n-1)}{x(x+1)} \int_0^1 (1-u)^{n-2} u^{x+1} \\ &= \dots \\ &= \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \int_0^1 u^{x+n-1} du \\ &= \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \end{aligned}$$

4. En déduire la formule : $\forall x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Correction

On applique un théorème de convergence dominée. On sait que

- pour tout n dans $\mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$,
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, continue par morceaux,
- pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|f_n(t)| \leqslant f(t)$, intégrable et indépendante de n,

donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)dt,$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Exercice 18. *Grand classique – la fonction gamma (d'après écrit Centrale PSI Maths 1 2011)*. On définit la fonction Γ d'Euler, pour tout réel $x > 0$, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

1. Montrer que la fonction $t \to e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$.
2. Justifier que la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$.
3. Exprimer $\Gamma(x + 1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$.
4. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel $n, n \geqslant 1$.

Exercice 19. *Grand classique – la transformée de Laplace*. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout p de $\mathrm{I} =]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-pt}f(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On définit la transformée de Laplace $\mathscr{L}[f] : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ par, pour tout $p \in \mathrm{I}$,

$$\mathscr{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}f(t)dt.$$

1. Démontrer que $\mathscr{L}[f]$ est continue sur I.

Correction

Il s'agit d'appliquer un théorème de continuité des intégrales à paramètre.

2. On suppose f dérivable et que pour tout x dans I, $t \mapsto \mathrm{e}^{-pt}f(t)$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-pt}f'(t)$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$. Exprimer alors $\mathscr{L}[f']$ en fonction de $\mathscr{L}[f]$ et de $f(0)$.
3. On suppose dans cette question que f est bornée sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $p\mathscr{L}[f](p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$ (théorème de la valeur initiale).
4. On suppose dans cette question que f admet une limite ℓ en $+\infty$. Démontrer que $p\mathscr{L}[f](p) \underset{p\to 0}{\longrightarrow} \ell$ (théorème de la valeur finale).

Exercice 20. *Grand classique – la transformée de Fourier (d'après Centrale PSI Maths 2 2016)*. On note $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{S}$. On considère la fonction $\mathcal{F}(f)$ (transformée de Fourier de f) définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\pi i t\xi}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\mathcal{F}(f)$ est bien définie.

2. Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (\mathcal{F}(f))^{(n)}(\xi) = (-2\pi \mathrm{i})^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t \xi} \,\mathrm{d}t$$

On considère la fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\theta(x) = \exp\left(-\pi x^2\right)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

3. Justifier que θ appartient à $\mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad y'(\xi) = -2\pi \xi y(\xi)$$

4. Établir que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$. *On admettra que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\mathrm{d}x = 1$.