TD 09
Limites et intégrales

1 Intégrales de suites et de séries de fonctions

Exercice 1. *CCINP 24*. Soit, pour tout n, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} t^n dt$.

1. Montrer que pour tout n, l'intégrale est bien définie et donner son signe.
2. Étudier les variations de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer la convergence de I_n et déterminer sa limite.
4. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $(n+1)\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n-1} = \mathrm{e}^{-1}$.
5. Montrer que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$.
6. Déterminer la nature de la série de terme général I_n.
7. Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^{n-1}\mathrm{I}_n$.

Exercice 2. *Mines-Telecom 24*. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+t^n\right) \mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale I_n est bien définie.
2. Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Montrer que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$ (en vérifiant que l'intégrale de droite est définie).
4. Sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que $\mathrm{I}_n \sim \dfrac{\pi^2}{12n}$.

   Indication : on utilisera le fait que pour tout t dans $[0,1]$, $\ln(1+t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}$.

Exercice 3. *Saint-Cyr 19*. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer u_n avec Python, afficher les valeurs des termes u_n pour n allant de 1 à 10.
2. Justifier l'existence de u_n pour tout n et calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
3. Donner un encadrement simple de u_n en fonction de n.
4. En déduire la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{u_n}{n}$.
5. Représenter avec Python les premières valeurs de $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!}$. Conjecture sur la convergence ?
6. Montrer la conjecture précédente.

Exercice 4. *Saint-Cyr 19*. Soit la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t-1}$.

1. Montrer que $\forall t \in]0,1[, \quad f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} -t^n \ln t$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 5. *Centrale 24*. **1.** On veut montrer la relation suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{ch}(t)}\mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

(a) Justifiez la convergence de l'intégrale.

(b) Montrer que pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\frac{t}{\mathrm{ch}(t)} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t\mathrm{e}^{-(2n+1)t}$.

(c) Conclure.

2. On veut montrer la relation suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$.

(a) Justifiez la convergence de l'intégrale.

(b) Établir la relation attendue.

On pourra montrer que pour $t > 0$, $\displaystyle\frac{\cos(t)}{1+\mathrm{e}^t} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-nt}\cos(t)$.

Exercice 6. *CCINP 24*. Pour tous p et n dans $\mathbb{N}$, on pose $\displaystyle \mathrm{I}_{n,p} = \int_0^1 x^p(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que les $\mathrm{I}_{n,p}$ sont bien définies.

2. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, une relation entre $\mathrm{I}_{n-1,p}$ et $\mathrm{I}_{n,p}$. En déduire une expression de $\mathrm{I}_{n,p}$ pour tous n et p.

3. Soit $f : x \in]0,1] \mapsto \dfrac{1}{x^x}$. Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$.

4. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$.

Exercice 7. *CCINP 23*. Soit $\displaystyle \mathrm{I} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\mathrm{sh}\,t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que I converge.

2. Montrer que :

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ \frac{\sin t}{\mathrm{sh}\,t} = 2\mathrm{e}^{-t}\sin t \cdot \sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2nt}.$$

3. Montrer que :

$$\mathrm{I} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)^2+1}$$

4. Montrer que : $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \mathrm{I} \leqslant 1 + \dfrac{\pi}{4}$.

2 Intégrales à paramètres

Exercice 8. *CCINP 24*. Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} \mathrm{e}^{-xt} \, \mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de f sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.
5. Montrer que $\forall x > 0 \quad f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$, puis calculer $f(x)$.
6. Soit $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt$. Exprimer I en fonction de $f(0)$ et calculer I.

Exercice 9. *CCINP 24*. On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \, \mathrm{d}t$.

1. (a) Montrer que f est bien définie sur $[0, +\infty[$.
   (b) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
   (c) Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[\quad f(x) = xf(x-1)$.
2. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \int_{n-1}^{n} \ln(f(t))\mathrm{d}t$ et on veut étudier la convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{v_n}$.
   (a) Soit $\ell : x \mapsto \int_{x-1}^{x} \ln(f(t))\mathrm{d}t$. Montrer que ℓ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer ℓ'.
   (b) Déterminer la limite de ℓ en $+\infty$.
   (c) En déduire la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{v_n}$.

Exercice 10. *Mines-Ponts 23*. On pose $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$ et, pour $x \geqslant 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)} \mathrm{d}t$.

1. Montrez que F est bien définie.
2. Déterminez une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par F sur $]0, +\infty[$.
3. Calculez $F(0)$ et $\lim\limits_{+\infty} F(x)$.
4. En déduire la valeur de I.
5. Calculer $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt$.

Exercice 11. *Mines 2024*. On pose $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\left(t^2+1\right)x^2}}{t^2+1} \, \mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Que vaut $f(0)$?
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.
3. Montrer que g est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2g'(x)g(x)$.
5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2$.
6. En déduire la limite de g en $+\infty$ puis conclure que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 12. *Mines-Ponts 24*. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$

1. Déterminer le domaine de définition I de F.
2. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur I et donner son sens de variation.
3. Déterminer les limites de F aux bornes de I.
4. Calculer $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$.
5. Montrer que $F(x) \sim \dfrac{6}{x^4}$ quand x tend vers $+\infty$. (On pourra majorer $|F-G|$)

Exercice 13. *Navale 22*. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t\,(1+t^2)} \mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition D de F.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D, calculer $F'(x)$, en déduire $F(x)$.

Exercice 14. *ENSEA 23, Mines 24*. On considère $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(2xt) \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par F.
3. En déduire l'expression de F. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 15. *CCINP 24*. Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}, b \in \mathbb{R}$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{e}^{-at}}{t} \cos(bt) \mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer g'.
3. En déduire g.

Exercice 16. *CCINP 24*. Soit $b > 0$. On pose : $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-bt} dt$ pour $x > 0$.

1. I est-elle bien définie ? Continue ? Que dire de $I(0)$?
2. Montrer que I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que pour $x > 0$: $\mathrm{I}(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{u^2}} \mathrm{e}^{-bu^2}\, \mathrm{d}u \quad , \quad \mathrm{I}'(x) = \int_0^{+\infty} -2\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{u^2}} \mathrm{e}^{-bu^2}}{u^2}\, \mathrm{d}u$.
4. Montrer à l'aide d'un changement de variable judicieux que : $\forall x > 0, \quad \mathrm{I}'(x) = -\sqrt{\dfrac{b}{x}}\mathrm{I}(x)$
5. En déduire l'expression de I.

3 Grands classiques

Exercice 17. *Grands classiques – la fonction gamma comme limite uniforme*. On définit, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt$.

1. Démontrer que Γ est définie sur $]0, +\infty[$.

On fixe $x > 0$. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant n, \text{ et } f_n(t) = 0 \text{ si } t \geqslant n.$$

2. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} = f(t)$ et que pour tout n, $0 \leqslant f_n \leqslant f$.

3. Démontrer que, pour n dans $\mathbb{N}$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

4. En déduire la formule : $\forall x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Exercice 18. *Grand classique – la fonction gamma (d'après écrit Centrale PSI Maths 1 2011)*. On définit la fonction Γ d'Euler, pour tout réel $x > 0$, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

1. Montrer que la fonction $t \to e^{-t} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$.

2. Justifier que la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$.

3. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$.

4. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel $n, n \geqslant 1$.

Exercice 19. *Grand classique – la transformée de Laplace*. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout p de $\mathrm{I} =]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-pt} f(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On définit la transformée de Laplace $\mathscr{L}[f] : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ par, pour tout $p \in \mathrm{I}$,

$$\mathscr{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t) dt.$$

1. Démontrer que $\mathscr{L}[f]$ est continue sur I.

2. On suppose f dérivable et que pour tout x dans I, $t \mapsto \mathrm{e}^{-pt} f(t)$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-pt} f'(t)$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$. Exprimer alors $\mathscr{L}[f']$ en fonction de $\mathscr{L}[f]$ et de $f(0)$.

3. On suppose dans cette question que f est bornée sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $p\mathscr{L}[f](p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$ (théorème de la valeur initiale).

4. On suppose dans cette question que f admet une limite ℓ en $+\infty$. Démontrer que $p\mathscr{L}[f](p) \underset{p\to 0}{\longrightarrow} \ell$ (théorème de la valeur finale).

Exercice 20. *Grand classique – la transformée de Fourier (d'après Centrale PSI Maths 2 2016)*. On note $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{S}$. On considère la fonction $\mathcal{F}(f)$ (transformée de Fourier de f) définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t\xi} \, \mathrm{d}t$$

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\mathcal{F}(f)$ est bien définie.

2. Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (\mathcal{F}(f))^{(n)}(\xi) = (-2\pi \mathrm{i})^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t\xi} \, \mathrm{d}t$$

On considère la fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\theta(x) = \exp\left(-\pi x^2\right)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

3. Justifier que θ appartient à $\mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad y'(\xi) = -2\pi\xi y(\xi)$$

4. Établir que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$. *On admettra que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) \mathrm{d}x = 1$.