

## Interrogation écrite 12 Cadeau de Noël

**Préambule.** Le but de cette « interro » est de vous faire pratiquer sur plein de **petits** exercices d'asymptotique. Je vous garantis que vous n'aurez absolument aucun dl à + de trois termes à faire. Et la majorité des exercices se font juste par des équivalents bien choisis, et par la réponse à la question « qui est gros » ?

### 1 Équivalent et limite...

1. ...en  $+\infty$  de  $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$  ?
2. ...en  $+\infty$  de  $\text{Arctan}(n)$  ?
3. ...en  $+\infty$  de  $\frac{(n+1)^2 + e^n(n + \pi n^2)^2}{1 - e^{-n}(n+2)^5}$  ?
4. ...en  $+\infty$  de  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  ?
5. ...en  $+\infty$  de  $n(\sqrt[3]{n+\pi} - \sqrt[3]{n})$  ?
6. ...en  $+\infty$  de  $(1+n)^n$  ?
7. ...en  $+\infty$  de  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  ?
8. ...en  $+\infty$  de  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$  ?
9. ...en  $+\infty$  de  $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$  ?
10. ...en  $+\infty$  de  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\ln(n)}$  ?
11. ...en  $+\infty$  de  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$  ?
12. ...en  $+\infty$  de  $\frac{n!(n! - n^n)}{e^n}$  ?
13. ...en 0 de  $\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$  (où  $a \neq b$ ) ?
14. ...en 0 de  $\frac{\sin(t^2)}{t}$  ?
15. ...en 0 de  $e^{-\frac{1}{t^2}}$  ?
16. ...en 0 de  $\frac{e^t}{t}$  ?
17. ...en 0 de  $\frac{e^t - 1}{t - 1}$  ?
18. ...en 0 de  $\frac{e^t - 1}{t}$  ?
19. ...en 0 de  $\frac{1 - \sin(t)}{t^2}$  ?
20. ...en 0 de  $\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$  ?
21. ...en 0 de  $\sqrt{t} \ln(t)$  ?
22. ...en 0 de  $\frac{\text{Arcsin}(x)}{\text{Arccos}(1-x)}$  ?
23. ...en 1 de  $\frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t^2}}$  ?
24. ...en  $a$  de  $\frac{\ln(x) - \ln(a)}{1 - \frac{x}{a}}$  ?
25. ...en  $+\infty$  de  $\frac{\ln(t) - te^t}{\text{sh}(t)}$  ?
26. ...en  $+\infty$  de  $\text{sh}(t)\text{ch}(t)$  ?
27. ...en  $+\infty$  de  $\text{Arctan}(t)\text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)$  ?
28. ...en  $+\infty$  de  $\frac{t^2 - t \ln(t)}{\sin(t) + t}$  ?
29. ...en  $+\infty$  de  $e^{x+\sqrt{x}-1} - e^x$  ?
30. ...en  $+\infty$  de  $\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^4}$  ?

## 2 Étudier le prolongement par continuité éventuel...

1. ...en 0 de  $e^{-\frac{1}{t^2}}$
2. ...en 1 de  $e^{-\frac{1}{(1-t^2)^2}}$
3. ...en 0 de  $\frac{\cos(t)}{(1-e^t)^2}$
4. ...en 0 de  $\frac{\sin(t)}{\operatorname{sh}(t)}$
5. ...en 0 de  $\frac{1}{\sqrt{t}}$
6. ...en 0 de  $\frac{t}{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}$
7. ...en 1 de  $\frac{\ln(\ln(t))}{t-1}$  ?
8. ...en 0 de  $t^t$  ?
9. ...en 0 de  $\operatorname{Arctan}(\ln(t))$  ?
10. ...en 1 de  $\frac{\ln(t)}{e^t - e}$  ?

## 3 Intégrabilité

En comparant à une série de Riemann et uniquement en comparant à une série de Riemann, étudier la convergence des séries de termes généraux suivants

1.  $\frac{e^n - 1}{n^2}$
2.  $\frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$
3.  $\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n}$
4.  $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
5.  $e^{-\sqrt{n}}$
6.  $\sqrt{n + \pi} - \sqrt{n}$
7.  $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$
8.  $\frac{e^n - n \cdot 2^n}{3^n - n^2 \cdot 2^n}$
9.  $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln(n)}$
10.  $\frac{1}{\ln(n) \ln(\operatorname{ch}(n))}$
11.  $\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$
12.  $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$

En comparant aux intégrales de référence, étudier la convergence des intégrales suivantes

1.  $\int_0^{+\infty} \frac{2t}{1+t+t^2} dt$
2.  $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$
3.  $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(\sqrt{t})} dt$
4.  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$
5.  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$
6.  $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t^2-t}} dt$
7.  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt$
8.  $\int_1^{+\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right) dt$
9.  $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} dt$
10.  $\int_0^e \frac{dt}{1-\ln(t)}$