PSI – Programme de colles
Semaine 12 – du 6 au 10 janvier 2025

Programme en bref. Semaine un peu particulière.

— « Cours » sur les limites d'intégrales : les questions de cours sont 5 exercices classiques, chacun sur un point du chapitre, que les étudiantes et les étudiants doivent pouvoir faire assez rapidement. On insistera énormément sur la précision dans les hypothèses des théorèmes.

— Exercices sur la réduction.

Exemples de questions de cours (exos très classiques)

1. Montrer que $\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$ tend vers $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ quand n tend vers $+\infty$
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.
3. On note $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Montrer que Γ est définie sur $]0,+\infty[$ et que pour $x>0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
4. On note $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Montrer que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
5. Soit $a>0$. On note $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}-e^{-at}}{t}dt$. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$, calculer F' et en déduire F.

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Éléments propres	
Droite stable par un endomorphisme.	
Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme.	Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$. Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	Notation $\mathrm{Sp}(u)$. La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.	Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Si un polynôme P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $AX = \lambda X$.
b) Polynôme caractéristique	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u. Coefficients de degrés 0 et $n-1$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme sont les racines de son polynôme caractéristique.	Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.
Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.	Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.
Théorème de Cayley-Hamilton.	La démonstration n'est pas exigible.
c) Diagonalisation en dimension finie	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres.

Contenus	Capacités & Commentaires
Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Interprétation en termes d'endomorphisme. Application au calcul des puissances d'une matrice diagonalisable, à des exemples de systèmes différentiels à coefficients constants. Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n=2$ ou $n=3$.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E.	Exemple des projecteurs et des symétries.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace.	Traduction matricielle.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Polynôme caractéristique scindé à racines simples. Traduction matricielle.

d) Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.	La démonstration n'est pas exigible. Traduction matricielle. Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme.
L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable. Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$ pour polynôme annulateur.	

e) Trigonalisation en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire. Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres. Interprétation en termes d'endomorphisme.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.	La démonstration n'est pas exigible. Traduction matricielle. La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

Limites et intégrales

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

e) Suites et séries de fonctions intégrables

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

Théorème de convergence dominée :
si une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La démonstration est hors programme.

Théorème d'intégration terme à terme :
si une série $\sum f_n$ de fonctions intégrables sur I converge simplement, si sa somme est continue par morceaux sur I, et si la série $\sum \int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et :

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

La démonstration est hors programme.

On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

f) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Théorème de continuité :
si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$;

alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème de convergence dominée à paramètre continu : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que : — pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$; — pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ; — il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\lvert f(x,t) \rvert \leqslant \varphi(t)$; alors ℓ est intégrable sur I et : $$\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.$$	On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.
Théorème de dérivation : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que : — pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ; — pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ; — pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ; — il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left\lvert \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration n'est pas exigible. En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ pour $0 \leqslant j < k$.	
	Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire.