 nlaillet.math@gmail.com

Interrogation écrite 12
Cadeau de Noël

Préambule. Le but de cette « interro » est de vous faire pratiquer sur plein de **petits** exercices d'asymptotique. Je vous garantis que vous n'aurez absolument aucun dl à + de trois termes à faire. Et la majorité des exercices se font juste par des équivalents bien choisis, et par la réponse à la question « qui est gros » ?

1 Équivalent et limite...

1. ...en $+\infty$ de $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$?

Correction

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. ...en $+\infty$ de $\mathrm{Arctan}(n)$?

Correction

$$\mathrm{Arctan}(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}.$$

3. ...en $+\infty$ de $\dfrac{(n+1)^2+\mathrm{e}^n(n+\pi n^2)^2}{1-\mathrm{e}^{-n}(n+2)^5}$?

Correction

$$\frac{(n+1)^2+\mathrm{e}^n(n+\pi n^2)^2}{1-\mathrm{e}^{-n}(n+2)^5} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^n\pi^2 n^4}{1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^n\pi^2 n^4 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

4. ...en $+\infty$ de $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$?

Correction

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

5. ...en $+\infty$ de $n\left(\sqrt[3]{n+\pi}-\sqrt[3]{n}\right)$?

Correction

$$\begin{aligned} n\left(\sqrt[3]{n+\pi}-\sqrt[3]{n}\right) &= n\sqrt[3]{n}\left(\sqrt{1+\frac{\pi}{n}}-1\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} n\sqrt[3]{n}\frac{\pi}{3n} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt[3]{n}\pi}{3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \end{aligned}$$

6. ...en $+\infty$ de $(1+n)^n$?

Correction

On écrit $(1+n)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+n)}$. Or

$$n\ln(1+n) = n\ln(n) + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) + 1 + o\left(1\right),$$

donc

$$(1+n)^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\ln(n)+1+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}\times\mathrm{e}^{n\ln(n)} = \mathrm{e}.n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

7. ...en $+\infty$ de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$?

Correction

On écrit $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. Or,

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$ donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}$.

8. ...en $+\infty$ de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$?

Correction

On écrit $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} = \mathrm{e}^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. Or,

$$n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Mais on n'a pas assez d'information pour avoir un équivalent. On écrit

$$n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} n-\frac{1}{2}+o(1),$$

donc

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n-\frac{1}{2}+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{n-\frac{1}{2}}.$$

9. ...en $+\infty$ de $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$?

Correction

Par le raisonnement précédent, on trouve aussi $+\infty$ et

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\sqrt{n}-\frac{1}{2}}$$

10. ...en $+\infty$ de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln(n)}$?

Correction

On écrit $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln(n)} = \mathrm{e}^{\ln(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. Or,

$$\ln(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.$

11. ...en $+\infty$ de $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$?

Correction

On trouve $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\mathrm{e}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}}$

12. ...en $+\infty$ de $\frac{n!(n!-n^n)}{\mathrm{e}^n}$?

Correction

$$\begin{aligned}\frac{n!(n!-n^n)}{\mathrm{e}^n} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!(-n^n)}{\mathrm{e}^n}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n!n^n}{\mathrm{e}^n}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.\end{aligned}$$

13. ...en 0 de $\frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}$ (où $a\neq b$) ?

Correction

$$\frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t} \underset{t\to0}{=} \frac{1-at-1+bt+o(t)}{t} \underset{t\to0}{\sim} b-a \xrightarrow[t\to0]{} b-a.$$

14. ...en 0 de $\frac{\sin(t^2)}{t}$?

Correction

$\dfrac{\sin(t^2)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{t} \underset{t\to 0}{\sim} t$

15. ...en 0 de $e^{-\frac{1}{t^2}}$?

Correction

$e^{-\frac{1}{t^2}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ et on ne sait pas trouver d'équivalent plus simple que $e^{-\frac{1}{t^2}}$

16. ...en 0 de $\dfrac{e^t}{t}$?

Correction

$\dfrac{e^t}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$, qui n'a pas de limite en 0

17. ...en 0 de $\dfrac{e^t-1}{t-1}$?

Correction

$\dfrac{e^t-1}{t-1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{-1} \underset{t\to 0}{\sim} -t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$

18. ...en 0 de $\dfrac{e^t-1}{t}$?

Correction

$\dfrac{e^t-1}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{t} = 1$

19. ...en 0 de $\dfrac{1-\sin(t)}{t^2}$?

Correction

$\dfrac{1-\sin(t)}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} +\infty$

20. ...en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$?

Correction

$\dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} +\infty$

21. ...en 0 de $\sqrt{t}\ln(t)$?

Correction

Il n'y a pas d'équivalent plus simple et on a une limite nulle

22. ...en 0 de $\dfrac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\mathrm{Arccos}(1-x)}$?

Correction

En 0, $\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. En 0, $\mathrm{Arccos}(1) = 0$ mais n'est pas dérivable... C'est LE calcul dur de la feuille. J'utilise que si $f : x \mapsto \mathrm{Arccos}(1-x)$,

$$f' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}},$$

donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + \sqrt{x} + o(\sqrt{x} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x},$$

donc

$$\frac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\mathrm{Arccos}(1-x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

23. ...en 1 de $\dfrac{\ln(t)}{\sqrt{1-t^2}}$?

Correction

$$\frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{t-1}{(1-t)(1+t)} \underset{t\to 1}{\sim} -\frac{1}{2} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$

24. ...en a de $\dfrac{\ln(x)-\ln(a)}{1-\frac{x}{a}}$?

Correction

$$\frac{\ln(x)-\ln(a)}{1-\frac{x}{a}} = \frac{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}{1-\frac{x}{a}} \underset{x\to a}{\sim} \frac{\frac{x}{a}-1}{1-\frac{x}{a}} = -1$$

25. ...en $+\infty$ de $\dfrac{\ln(t)-te^t}{\mathrm{sh}(t)}$?

Correction

$$\frac{\ln(t)-te^t}{\mathrm{sh}(t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{-te^t}{\frac{e^t}{2}} \underset{t\to+\infty}{\sim} -2t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

26. ...en $+\infty$ de $\mathrm{sh}(t)\mathrm{ch}(t)$?

Correction

$$\mathrm{sh}(t)\mathrm{ch}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^t}{2}\frac{e^t}{2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{2t}}{4} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

27. ...en $+\infty$ de $\mathrm{Arctan}(t)\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{t}\right)$?

Correction

$$\mathrm{Arctan}(t)\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

28. ...en $+\infty$ de $\dfrac{t^2-t\ln(t)}{\sin(t)+t}$?

Correction

$\dfrac{t^2 - t\ln(t)}{\sin(t)+t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^2}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

29. ...en $+\infty$ de $\mathrm{e}^{x+\sqrt{x}-1} - \mathrm{e}^x$?

Correction

$\mathrm{e}^x \underset{t\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{x+\sqrt{x}-1})$ donc

$$\mathrm{e}^{x+\sqrt{x}-1} - \mathrm{e}^x \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{x+\sqrt{x}-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

30. ...en $+\infty$ de $\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x^4}$?

Correction

Il n'y a pas d'équivalent plus simple et, par croissances comparées,

$$\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x^4} = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^8} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

2 Étudier le prolongement par continuité éventuel...

1. ...en 0 de $\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}$

Correction

$\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}} \underset{t\to0}{\longrightarrow} 0$ donc la fonction est prolongeable par continuité avec la valeur 0 en 0.

2. ...en 1 de $\mathrm{e}^{-\frac{1}{(1-t^2)^2}}$

Correction

$-\dfrac{1}{(1-t^2)^2} \underset{t\to1}{\longrightarrow} -\infty$ donc $\mathrm{e}^{-\frac{1}{(1-t^2)^2}} \underset{t\to1}{\longrightarrow} 0$ donc la fonction est prolongeable par continuité avec la valeur 0 en 1.

3. ...en 0 de $\dfrac{\cos(t)}{(1-\mathrm{e}^t)^2}$

Correction

$\dfrac{\cos(t)}{(1-\mathrm{e}^t)^2} \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$, qui n'a pas de limite finie en 0, donc la fonction n'est pas prolongeable par continuité en 0.

4. ...en 0 de $\dfrac{\sin(t)}{\mathrm{sh}(t)}$

 nlaillet.math@gmail.com

Correction

$\dfrac{\sin(t)}{\mathrm{sh}(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{t} = 1$ donc la fonction est prolongeable par continuité avec la valeur 1 en 0.

5. ...en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$

Correction

$\dfrac{1}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} +\infty$, donc la fonction n'est pas prolongeable par continuité en 0.

6. ...en 0 de $\dfrac{t}{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}$

Correction

$\dfrac{t}{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{1} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc la fonction est prolongeable par continuité avec la valeur 0 en 0.

7. ...en 1 de $\dfrac{\ln(\ln(t))}{t-1}$?

Correction

$\ln(t) \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 0^+$ donc $\ln(\ln(t)) \underset{t\to 1}{\longrightarrow} -\infty$ donc $\dfrac{\ln(\ln(t))}{t-1} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} -\infty$ donc la fonction n'est pas prolongeable par continuité en 1.

8. ...en 0 de t^t ?

Correction

$t^t = \mathrm{e}^{t\ln(t)}$. Par croissances comparées, $t\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $t^t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc la fonction est prolongeable par continuité avec la valeur 1 en 0.

9. ...en 0 de $\mathrm{Arctan}(\ln(t))$?

Correction

$\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ donc $\mathrm{Arctan}(\ln(t)) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{\pi}{2}$ donc la fonction est prolongeable par continuité avec la valeur $-\dfrac{\pi}{2}$ en 0.

10. ...en 1 de $\dfrac{\ln(t)}{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}}$?

Correction

$$\frac{\ln(t)}{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}} = \frac{\ln(1+(t-1))}{\mathrm{e}(\mathrm{e}^{t-1}-1)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{t-1}{\mathrm{e}(t-1)} = \frac{1}{\mathrm{e}},$$

donc la fonction est prolongeable par continuité avec la valeur $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ en 0.

3 Intégrabilité

En comparant à une série de Riemann et uniquement en comparant à une série de Riemann, étudier la convergence des séries de termes généraux suivants

1. $\dfrac{e^n - 1}{n^2}$

Correction

$\dfrac{e^n - 1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc la série diverge

2. $\dfrac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$

Correction

$\dfrac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, donc la série diverge.

3. $\dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n}$

Correction

$\dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ donc la série converge.

4. $e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Correction

On écrit

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)},$$

donc

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2n},$$

donc la série diverge.

5. $e^{-\sqrt{n}}$

Correction

$n^2 e^{-\sqrt{n}} = (\sqrt{n})^4 e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc la série converge.

6. $\sqrt{n+\pi} - \sqrt{n}$

Correction

$\sqrt{n+\pi} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \dfrac{\pi}{n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}$, donc la série diverge.

 nlaillet.math@gmail.com

7. $\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

Correction

$\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{n^{1/n}}$ et $n^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$, donc $\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, donc la série diverge.

8. $\dfrac{e^n - n.2^n}{3^n - n^2.2^n}$

Correction

$\dfrac{e^n - n.2^n}{3^n - n^2.2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n2^n}{3^n} = n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, et, par croissances comparées, $n^2 n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\dfrac{e^n - n.2^n}{3^n - n^2.2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc la série converge.

9. $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln(n)}$

Correction

C'est un peu plus compliqué.

$$\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln(n)} = e^{\ln(n)\ln\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)}.$$

Or,

$$\left(\frac{n+3}{2n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

et même

$$\left(\frac{n+3}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{5}{4n+2}$$

Donc

$$\ln\left(\frac{n+3}{2n+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{4n+2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{5}{2n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(2) + \frac{5}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}\ln(n)\ln\left(\frac{n+3}{2n+1}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} -\ln(2)\ln(n) + \ln(n)\times O\left(\frac{1}{n}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\ln(2)\ln(n) + o(1)\end{aligned}$$

donc

$$e^{\ln(n)\ln\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{-\ln(2)\ln(n)+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\ln(2)\ln(n)} = n^{-\ln(2)}$$

Or, $\ln(2) < 1$ donc la série diverge.

10. $\dfrac{1}{\ln(n)\ln(\mathrm{ch}(n))}$

Correction

$\ln(\mathrm{ch}(n)) = \ln(\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}) - \ln(2) = \ln(\mathrm{e}^n) + \ln(1 + \mathrm{e}^{-2n}) - \ln(2) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, donc $\dfrac{1}{\ln(n)\ln(\mathrm{ch}(n))} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln(n)}$, **et là, je vous ai menti, on a besoin de parler de séries de Bertrand ! Mea culpa.** La série diverge.

11. $\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Correction

$$\begin{aligned}
\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n &= \mathrm{e}^{n\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{2(2n)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}} &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{8n\sqrt{\mathrm{e}}},
\end{aligned}$$

donc la série diverge.

12. $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

Correction

Déjà

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{2}{n}\right)^n &= \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{2-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^2\left(1-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} &= \mathrm{e}^{2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{2n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{2-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^2\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Donc
$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\underset{n\to+\infty}{=}e^2\left(1-\frac{2}{n}-1+\frac{1}{n}o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{e^2}{2n},$$
donc la série diverge.

En comparant aux intégrales de référence, étudier la convergence des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2t}{1+t+t^2}dt$

Correction

- L'intégrande est continu sur $[0,+\infty[$,
- $\displaystyle\frac{2t}{1+t+t^2}dt\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{2t}{t^2}=\frac{2}{t}$, non intégrable en $+\infty$,

donc l'intégrale ne converge pas.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{t}}dt$

Correction

- $t\mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $[0,+\infty[$,
- $t^2e^{-\sqrt{t}}=(\sqrt{t})^4e^{-\sqrt{t}}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc $e^{-\sqrt{t}}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, intégrable en $+\infty$,

donc l'intégrale converge.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(\sqrt{t})}dt$

Correction

- $t\mapsto\dfrac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(\sqrt{t})}$ est continue sur $[0,+\infty[$,
- $\displaystyle\frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(\sqrt{t})}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{\frac{e^t}{2}}{\frac{e^{\sqrt{t}}}{2}}=e^{t-\sqrt{t}}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$,

donc l'intégrale diverge.

4. $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$

Correction

- $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est continue sur $]0,1[$,
- $\dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, intégrable en 0,
- $\dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$, intégrable en 1,

donc l'intégrale converge.

5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt$

Correction

- $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$,
- $t^{3/2}\dfrac{\ln(t)}{t^2} = \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\dfrac{\ln(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$, intégrable en $+\infty$,

donc l'intégrale converge.

6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t^2-t}}\,dt$

Correction

- $t \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{t^2-t}}$ est continue sur $[1,+\infty[$,
- $t^2\mathrm{e}^{-\sqrt{t^2-t}} = \mathrm{e}^{2\ln(t)-\sqrt{t^2-t}}$. Mais $\ln(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(\sqrt{t^2-t})$ (car $\sqrt{t^2-t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{t}$)

  donc $t^2\mathrm{e}^{-\sqrt{t^2-t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\mathrm{e}^{-\sqrt{t^2-t}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, intégrable en $+\infty$,

donc l'intégrale converge.

7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$

Correction

- $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2-1}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$,
- $\dfrac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{t-1}{2(t-1)} = \dfrac{1}{2}$, donc l'intégrande est prolongeable par continuité en 1,
- $\dfrac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$, intégrable en 0,
- $t^{3/2}\dfrac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$, intégrable en $+\infty$,

donc l'intégrale converge.

8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)dt$

Correction

- $t \mapsto \mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ est continue sur $]1 + \infty[$,
- ensuite,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t &= \mathrm{e}^{t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}\\ &\underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{t\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)}\\ &\underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2t}+o\left(\frac{1}{t}\right)}\\ &\underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right),\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{2t},$$

non intégrable en $+\infty$,

donc l'intégrale ne converge pas.

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} dt$

Correction

- $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1, 1$ et paire, donc on n'étudie l'intégrabilité qu'en 1,
- $\dfrac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{4\sqrt{1-t}}$, intégrable en 1,

donc l'intégrale converge.

10. $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}} \frac{dt}{1-\ln(t)}$

Correction

- $t \mapsto \dfrac{1}{1-\ln(t)}$ est continue sur $]0, \mathrm{e}[$,
- $\dfrac{1}{1-\ln(t)} \underset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{\ln(t)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc l'intégrande est prolongeable par continuité en 0,
- enfin,

$$\frac{1}{1-\ln(t)} = -\frac{1}{\ln\left(\frac{t}{\mathrm{e}}\right)} \underset{t\to\mathrm{e}}{\sim} -\frac{1}{\frac{t}{\mathrm{e}}-1} = -\frac{\mathrm{e}}{t-\mathrm{e}},$$

non intégrable en 0,

donc l'intégrale ne converge pas.