TD 10
Séries entières

Exercice 1. *Banque CCINP MP.*

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :
   (a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.
   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$.
   (c) $\sum \cos(n) z^n$.

Exercice 2. *Banque CCINP MP.*

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \text{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(0) = 1, \quad f(x) = \text{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0$$
   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. *Nombres de Catalan, d'après écrit Centrale PC et MP 2021*. Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $C_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} C_n x^n$ et on désigne sa somme par f. On suppose déjà que $R > 0$.

1. Montrer que $xf(x)^2 - f(x) + 1 = 0$ pour tout $x \in]-R, R[$.
2. On note $r = \min\left(R, \frac{1}{4}\right)$. Démontrer que pour tout x dans $]-r, r[$, il existe $\varepsilon(x) \in \{-1, 1\}$ tel que
   $$f(x) = \frac{1 + \varepsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2x}$$
3. Démontrer que ε est continue sur $]-r, r[$, que f est continue en 0 et en déduire que pour tout $x \in]-r, r[$, $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.
4. En déduire une expression de C_n pour tout n dans $\mathbb{N}$, et déterminer le rayon de convergence de f.

Exercice 4. *ENSEA 24*. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{2+t^2}\, dt$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Pour $x \in]-R, R[$ trouver une expression simple de $f(x)$.

Exercice 5. *Mines-Télécom 24*. Soit $f : x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 satisfaite par f.
3. En déduire le développement de f en série entière.

Exercice 6. *CCINP 24*. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

1. Vérifier que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(4n+2)a_{n+1} = (n+1)a_n$.
2. Donner le rayon de convergence de f, que l'on notera R.
3. Montrer que : $\forall x \in]-R, R[, x(4-x)f'(x) - (x+2)f(x) + 2 = 0$.
4. En posant $u = \sqrt{\frac{4-x}{x}}$, trouver une primitive de $\frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}$ sur $]0, 4[$.
5. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{x+2}{x(4-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{4-x}$. Trouver enfin l'expression de $f(x)$.

Exercice 7. *CCINP 24*. Soit $n \in \mathbb{N}, (u_n)$ est la suite définie par

$$u_0 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}.$$

1. Énoncer le théorème du produit de Cauchy pour des séries absolument convergentes.
2. Montrer que $\forall n \in\ \text{N} \quad 0 \leqslant \frac{u_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$.
3. On considère $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$. Montrer que f est définie au moins sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ et est une solution de l'équation différentielle $y' = y^2$.
4. (a) Montrer que f ne s'annule pas sur $\left[0, \frac{1}{4}\right[$.
   (b) En déduire u_n pour $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Déterminer le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.

Exercice 8. *CCINP 24*. On pose $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n) x^n$ et $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$.

1. Déterminer les rayons de convergence de f et g.
2. Montrer que g est définie et continue sur $[-1, 1[$.
3. Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
4. Montrer que f est continue sur $]-1, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 .
5. Trouver un équivalent de g, puis de f, en 1^-.
   On pourra s'intéresser à $\sum_{n \geqslant 0} -\frac{1}{n} x^n$ *en* 1^- *dans un premier temps.*

Exercice 9. *Mines-Ponts 24*. Soit (E) l'équation différentielle : $x^2 y'(x) + y(x) = x^2$.

1. Montrer que (E) n'admet pas de solution développable en série entière.
2. Résoudre l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$.

Exercice 10. *Mines-Ponts 24*. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la suite de fonctions définie par, pour tout n dans $\mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour quelles valeurs de a la série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$? On suppose cette condition remplie dans la suite et l'on pose : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $S^{(k)}(0)$.
3. En utilisant le théorème de Fubini, montrer que pour $a > 1$, S est développable en série entière en 0.

Exercice 11. *Centrale 24*. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{-3\}$ on pose $f(z) = \dfrac{3z}{3+z}$.

1. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
2. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $g(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{5+3\cos(\theta)}$. Calculer $\operatorname{Im}\left(f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right)$ puis montrer que l'on peut écrire : $g(\theta) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\theta)$, où les b_k sont des réels à préciser.
3. Calculer $\int_0^{2\pi/3} g(\theta)\mathrm{d}\theta$. En déduire une somme remarquable.

Exercice 12. *Mines-Ponts 2023*. À l'aide d'une série entière bien choisie, calculer $w_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$.

Exercice 13. *Centrale 23*. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(n^2 x\right)\mathrm{e}^{-n}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Exprimer, pour $p \in \mathbb{N}$, $f^{(4p)}(0)$ sous forme de somme.
2. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{8p} t^{8p}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{8p} n^{8p}\mathrm{e}^{-n}$ et $\int_{8p}^{+\infty} t^{8p}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=8p}^{+\infty} n^{8p}\mathrm{e}^{-n}$.
3. Montrer que, pour tout $r > 0$, la série de terme général $\dfrac{f^{(4p)(0)}}{(4p)!}r^{4p}$ est divergente. En déduire que f n'est pas développable en série entière.

Exercice 14. *Mines-Ponts 24*. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}x^{2n}$.

1. Trouver l'ensemble de définition de f.
2. Trouver une équation différentielle vérifiée par f.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in]1, +\infty[$.

Exercice 15. *Centrale 24*. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$, on note $v_n = -\alpha\ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{\alpha}{k}\right)$ et $a_n = \dfrac{n!}{\prod_{i=1}^{n}(\alpha + i)}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$.
2. Montrer que $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.
3. En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.
4. Étudier la convergence de $\sum a_n z^n$ pour $|z| = R$.

   Indication. Pour $\alpha \leqslant 1$, on pourra noter $B_N = \sum_{n=0}^{N} z^n$ et exprimer $\sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ à l'aide de B_n et de $a_n - a_{n+1}$.

 N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Exercice 16. *Centrale python 22*. On pose $g(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$, $P_0 = 1$, $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$ et $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
2. En déduire que g admet un développement limité en 0 à tout ordre.
3. **[Py]** En effectuant des calculs sur les polynômes avec Python, calculer les 10 premiers coefficients du développement limité de $g(x)$ en 0.
4. **[Py]** Comparer avec les 10 premières valeurs de I_n. Que peut-on conjecturer ?
5. Trouver un encadrement judicieux de I_n afin de déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\mathrm{I}_n x^n$.
6. Comparer $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{I}_n x^n$ et $\displaystyle\int_0^1 (1+x)^t \, \mathrm{d}t$; en déduire une preuve de la conjecture formulée en 4.

Exercice 17. *Centrale 2024*.

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière qui converge sur $]-\alpha,\alpha[$, avec $\alpha > 0$. Montrer que sa somme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\alpha,\alpha[$.
2. Est-ce que toute fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un ouvert contenant 0 est développable en série entière au voisinage de 0 ?
3. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un ouvert contenant 0 . Montrer qu'elle est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement si :

$$\exists(\alpha, M, A) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\alpha,\alpha], \left|f^{(p)}(x)\right| \leqslant MA^p p!$$

Remarque : c'est une question posée à l'écrit de l'X, en MP, en 2021... Je donne donc les indications suivantes :

- *pour le sens réciproque (le plus simple), utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.*
- *pour le sens direct montrer que si f est DSE sur $]-R,R[$, alors pour tout $r \in]0,R[$, $\left(\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Utiliser cette borne et penser à reconnaître une dérivée p-ième de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.*