PSI – Programme de colles
Semaine 13 – du 13 au 17 janvier 2025

Programme en bref.

— « Cours » sur les limites d'intégrales : ou bien un des exos classiques de la liste, ou bien l'énoncé précis d'un des théorèmes du cours. J'ai mis aussi deux petites questions de cours sur les séries entières.

— Exercices sur les limites d'intégrales (convergence dominée, intégrales à paramètre).

Exemples de questions de cours (exos très classiques)

1. Montrer que $\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$ tend vers $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ quand n tend vers $+\infty$
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.
3. On note $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Montrer que Γ est définie sur $]0,+\infty[$ et que pour $x>0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
4. On note $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Montrer que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
5. Soit $a>0$. On note $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}-e^{-at}}{t}dt$. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$, calculer F' et en déduire F.

6. (début du cours de séries entières) Lemme d'Abel + si R est le rayon de convergence, alors pour tout $|z|<R$, $\sum a_n z^n$ CVA et pour tout $|z|>R$, on a divergence grossière.
7. (début du cours de séries entières) La proposition précédente caractérise le rayon de convergence.

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Limites et intégrales

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Suites et séries de fonctions intégrables	
<u>Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.</u> Théorème de convergence dominée : si une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n\rvert \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et : $$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme.
Théorème d'intégration terme à terme : si une série $\sum f_n$ de fonctions intégrables sur I converge simplement, si sa somme est continue par morceaux sur I, et si la série $\sum \int_I \lvert f_n(t)\rvert\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et : $$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

f) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de continuité :
si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

— pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;

— pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

— il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$;

alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Théorème de convergence dominée à paramètre continu : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que :

— pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$;

— pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;

— il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$;

alors ℓ est intégrable sur I et :

$$\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.$$

On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.

Théorème de dérivation :
si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

— pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ;

— pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;

— pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

— il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

La démonstration n'est pas exigible.
En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ pour $0 \leqslant j < k$.

Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire.