Durée : 4 heures — Calculatrices autorisées

Autour des matrices de Toeplitz

I Généralités et quelques exemples

Q 1. Si $(t_{-n+1}, ..., t_n, ..., t_{n-1})$ sont $2n-1$ nombres complexes, alors

$$\begin{aligned} T(t_{-n+1}..., t_0, ..., t_{n-2}, t_{n-1}) &= t_{-n+1}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} + t_{-n+2}\begin{pmatrix} 0 & & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + ... + t_{n-1}\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=-n+1}^{n-1} t_k D_k, \end{aligned}$$

donc $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(D_{-n+1}, ..., D_0, ..., D_{n-1})$, donc $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, engendré par $(D_{-n+1}, ..., D_0, ..., D_{n-1})$, qui est clairement une famille libre, donc en est une base. Donc $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K})$ est de dimension $2n-1$.

Q 2. Soient A et B deux matrices qui commutent. Alors on démontre par récurrence que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $AB^k = B^kA$. L'initialisation est évidente car A commute avec I_n. Ensuite, si $AB^k = B^kA$ pour un certain k, alors $AB^{k+1} = AB^kB = B^kAB$ par hypothèse de récurrence, donc $AB^{k+1} = AB^{k+1}$ car $AB = BA$. D'où l'hérédité et le résultat par récurrence.
Ensuite, on montre de même que pour tout j et pour tout k entiers, $A^jB^k = B^kA^j$.
Enfin, si P et Q sont deux polynômes, on écrit $P(X) = \sum_{j=0}^{r} a_jX^j$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{s} b_kX^k$, donc

$$\begin{aligned} P(A)Q(B) &= \left(\sum_{j=0}^{r} a_jA^j\right)\left(\sum_{k=0}^{s} b_kB^k\right) \\ &= \sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{s} a_jb_kA^jB^k \\ &= \sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{s} a_jb_kB^kA^j \text{ par ce que l'on vient de démontrer} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{s} b_kB^k\right)\left(\sum_{j=0}^{r} a_jA^j\right) = Q(B)P(A) \end{aligned}$$

Donc $P(A)$ et $Q(B)$ commutent.

I.A – Cas de la dimension 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz de taille 2×2, où (a, b, c) sont des complexes.

Q 3. Si $x \in \mathbb{C}$, on calcule $\det(xI_2 - A) = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-a \end{vmatrix} = (x-a)(x-a) - bc = x^2 - 2ax + a^2 - bc$.

Q 4. Le discriminant de ce polynôme caractéristique est $4a^2 - 4(a^2 - bc) = 4bc$. Ainsi, si b et c sont non nuls, le polynôme caractéristique a deux racines distinctes, donc est scindé à racines simples, et A est diagonalisable. En revanche, si $c = 0$, A est triangulaire supérieure avec que des a sur la diagonale : si elle était diagonalisable, elle serait semblable à aI_2, donc égale à aI_2. Donc si b ou c est nul, A est diagonalisable si et seulement si b et c sont nuls.

Réduction d'une matrice sous forme de Toeplitz

Q 5. La matrice M est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, donc est trigonalisable. Si elle admet deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable donc semblable à une matrice du premier type. Sinon, elle est semblable à une matrice du second type.

Q 6. Soit M dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si M n'admet qu'une valeur propre, alors M est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, qui est de Toeplitz. Sinon, M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} PAP^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha+\beta & -\alpha+\beta \\ -\alpha+\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

qui est une matrice de Toeplitz. D'où le résultat désiré.

I.B – Un autre cas particulier : les matrices tridiagonales

Q 7. On écrit l'équation aux valeurs propres $A_n(a,b,c)X = \lambda X$. Elle se réécrit sous la forme du système suivant

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} & ax_1 & +bx_2 & = & \lambda x_1 \\ cx_1+ & ax_2 & +bx_3 & = & \lambda x_2 \\ & & & \vdots & \\ cx_{n-2}+ & ax_{n-1} & +bx_n & = & \lambda x_{n-1} \\ cx_{n-1}+ & ax_n & & = & \lambda x_n, \end{array}\right.$$

soit, en faisant passer les termes de droite à gauche, et en introduisant x_0 et x_{n+1} qui sont nuls, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rccrl} bx_2 & (a-\lambda)x_1 & +cx_0 & = & 0 \\ bx_3+ & (a-\lambda)x_2 & +cx_1 & = & 0 \\ & & & \vdots & \\ bx_n+ & (a-\lambda)x_{n-1} & +cx_{n-2} & = & 0 \\ bx_{n+1}+ & (a-\lambda)x_n & +cx_{n-1} & = & 0 \end{array}\right. ,$$

d'où le résultat souhaité.

Q 8. Par le cours, on sait que deux cas sont possibles :

1. si (e) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, on a pour tout k, $x_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k$ avec α et β deux complexes.
2. si (e) n'admet qu'une solution (racine double du polynôme), r_0, alors pour tout k, $x_k = (\alpha + \beta k)r_0^k$.

Q 9. Mais, en utilisant les deux conditions $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$ dans le deuxième cas, on obtient que $\alpha = \beta = 0$, i.e. que $x_0 = x_1 = ... = x_n = x_{n+1} = 0$, absurde car X est un vecteur propre, donc n'est pas nul. Donc le second cas est à exclure et l'équation admet nécessairement deux solutions.

Q 10. Si r_1 ou r_2 était nul, alors par le même raisonnement que précédemment, on aurait X qui serait nul, absurde. Ensuite, $x_0 = 0$ donc $\alpha = -\beta$, et $x_{n+1} = 0$, donc $\alpha r_1^{n+1} - \alpha r_2^{n+1} = 0$. Or, α n'est pas nul car sinon X serait le vecteur nul, donc $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$, donc, en divisant par r_2, $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1$, i.e. $\frac{r_1}{r_2}$ appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$.

Q 11. Par les formules du produit et de la somme de racines d'un polynôme, ou bien en écrivant que $bx^2 + (a-\lambda)x + c = b(x-r_1)(x-r_2)$, on en déduit que $r_1 r_2 = \frac{c}{b}$ et $r_1 + r_2 = \frac{\lambda - a}{b}$. Mais $\frac{r_1}{r_2} \in \mathbb{U}_{n+1}$, donc on dispose de $\ell \in [\![1,n]\!]$ tel que $r_1 = r_2 e^{\frac{2i\ell\pi}{n+1}}$ (on a éliminé le cas $\ell = 0$ car nécessairement, $r_1 \neq r_2$). Donc l'équation $r_1 r_2 = \frac{c}{b}$ donne

$$r_2^2 e^{\frac{2i\ell\pi}{n+1}} = \frac{c}{b} = \frac{bc}{b^2},$$

donc $r_2 = \frac{\rho}{b} e^{-\frac{i\ell\pi}{n+1}}$, où rho est une racine de bc. On en déduit par la dernière équation que $\lambda = a + b(r_1 + r_2)$, donc

$$\lambda = a + \rho\left(e^{\frac{i\ell\pi}{n+1}} + e^{-\frac{i\ell\pi}{n+1}}\right) = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right),$$

d'où le résultat.

Q 12. On en déduit maintenant l'expression de x_k : on sait que $x_k = \alpha(r_1^k - r_2^k)$, donc $x_k = \alpha\frac{\rho^k}{b^k}\left(e^{\frac{i\ell\pi}{n+1}} - e^{-\frac{i\ell\pi}{n+1}}\right) = \alpha\frac{\rho^k}{b^k} 2i\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$. Le résultat est ainsi démontré !

Q 13. L'analyse effectuée précédemment nous a montré que si $\ell \in [\![1,n]\!]$, alors le vecteur $X = {}^t(x_1, ..., x_n)$ défini par, pour tout k, $x_k = \frac{\rho^k}{b^k} 2i \sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$ est vecteur propre de $A_n(a,b,c)$ associé à la valeur propre $a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$. Ensuite, pour tous entiers ℓ et ℓ' dans $[\![1,n]\!]$, $\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) \neq \cos\left(\frac{\ell'\pi}{n+1}\right)$, donc on a bien trouvé n valeurs propres distinctes pour $A_n(a,b,c)$, donc cette matrice est diagonalisable.

II Matrices circulantes

Q 14. Écrivons les matrices par bloc pour y voir plus clair. On peut écrire $M_n = \begin{pmatrix} 0_{n-1,1} & I_{n-1} \\ 1 & 0_{1,n-1} \end{pmatrix}$. De même, $M_n^2 = \begin{pmatrix} 0_{n-2,2} & I_{n-2} \\ I_2 & 0_{2,n-2} \end{pmatrix}$ et, pour tout $k \leqslant n-1$, $M_n^k = \begin{pmatrix} 0_{n-k,k} & I_{n-k} \\ I_k & 0_{k,n-k} \end{pmatrix}$. Enfin, $M_n^n = I_n$. Donc M_n est inversible d'inverse $M_n^{n-1} = {}^t M_n$.

Q 15. On sait que $M_n^n = I_n$ donc $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de M_n. Or $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_n^k)$, donc $X^n - 1$ est un polynôme scindé à racines simples. Donc M_n est diagonalisable et ses racines sont toutes parmi les racines n-ièmes de l'unité. Ensuite, si $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors l'équation $M_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \omega_n^k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ s'écrit

$$\begin{cases} x_2 &= \omega^k x_1 \\ x_3 &= \omega^k x_2 \\ & \vdots \\ x_1 &= \omega^k x_n \end{cases}$$

Soit, pour tout i, $x_i = \omega_n^{k(i-1)} x_1$. Donc pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, ω_n^k est valeur propre, avec comme espace propre associé la droite propre dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^k \\ \vdots \\ \omega_n^{n-1} \end{pmatrix}$.

Q 16. La matrice Φ_n est la matrice des vecteurs propres de M_n, calculée dans la question précédente. Il s'agit donc d'une matrice de passage d'une base dans une autre. Donc Φ_n est inversible, et $\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n$ est la matrice dont les termes diagonaux sont $1, \omega_n, ..., \omega_n^{n-1}$.

Q 17. Si A est une matrice circulante, alors on dispose de $t_0, t_1, ..., t_{n-1}$ tels que $A = T(t_1, t_2 ..., t_0, t_1, ..., t_{n-2}, t_{n-1})$, i.e.

$$A = t_0 M_n^0 + t_1 M_n + ... + t_{n-1} M_n^{n-1} = P(M_n),$$

où $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k M_n^k$. Réciproquement, si $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k X^k$, $P(M_n) = T(t_1, t_2 ..., t_0, t_1, ..., t_{n-2}, t_{n-1})$. D'où l'égalité souhaitée.

Q 18. On remarque que $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de M_n. Écrivons donc $P = (X^n - 1)Q + R$ avec Q et R dans $\mathbb{C}[X]$ et R de degré strictement inférieur à n. Alors $P(M_n) = (M_n^n - I_n)Q(M_n) + R(M_n) = R(M_n)$. Écrivons maintenant $R(X) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k X^k$. Alors

$$R(M_n) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k M_n^k = T(t_1, t_2, ..., t_0, t_1, ..., t_{n-2}, t_{n-1}),$$

donc $P(M_n)$ est une matrice circulante.

Q 19. On sait que l'ensemble des matrices circulantes est l'ensemble $\{P(M_n) \mid P \in \mathbb{C}[X]\}$. Cet ensemble est non vide et bien inclus dans l'ensemble des matrices de Toeplitz.

Soient A et B sont deux matrices circulantes, λ et μ deux réels. Soient P et Q deux polynômes tels que $A = P(M_n)$ et $B = Q(M_n)$. Alors $\lambda A + \mu B = \lambda P(M_n) + \mu Q(M_n) = R(M_n)$ où $R = \lambda P + \mu Q$ est un polynôme à coefficients complexes. Donc $\lambda A + \mu B$ est une matrice circulante, donc l'ensemble des matrices circulantes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices de Toeplitz.

De même, $AB = P(M_n)Q(M_n) = (PQ)(M_n)$, qui est est une matrice circulante par la question précédente, d'où la stabilité par produit.

Enfin, remarquons que ${}^t M_n = M_n^{n-1}$, donc si A est une matrice circulante et si P est un polynôme tel que $A = P(M_n)$, ${}^t A = {}^t P(M_n) = P({}^t M_n) = P(M_n^{n-1}) = Q(M_n)$ où $Q(X) = P(X^{n-1})$, donc, comme nous venons de voir que tout polynôme en M_n était une matrice circulante, $Q(M_n)$ est circulante.

Q 20. Soit A une matrice circulante. Alors on dispose de P dans $\mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(M_n)$. Alors $\Phi^{-1}M_n\Phi = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \omega_n & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix} = D$. Donc $\Phi^{-1}M_n^2\Phi = D^2$ et par une récurrence immédiate, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\Phi^{-1}M_n^k\Phi = D^k$, donc par linéarité $\Phi^{-1}A\Phi = \Phi^{-1}P(M_n)\Phi = P(D) = \begin{pmatrix} P(1) & & & (0) \\ & P(\omega_n) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & P(\omega_n^{n-1}) \end{pmatrix}$, donc A est diagonalisable, de valeurs propres $P(1), P(\omega_n), ..., P(\omega_n^{n-1})$ et de vecteurs propres identiques à ceux de M_n.

III Étude des matrices cycliques

III.A – Endomorphismes et matrices cycliques

Q 21. Supposons qu'il existe x_0 dans $\mathbb{C}^n$ tel que $(x_0, f_M(x_0), ..., f_M^{n-1}(x_0))$ forme une base de $\mathbb{C}^n$. Alors déterminons la matrice de f_M dans cette base : $f_M(x_0) = f_M(x_0)$, $f_M(f_M(x_0)) = f_M^2(x_0)$, ..., $f_M(f_M^{n-2}(x_0)) = f_M^{n-1}(x_0)$ et $f_M(f_M(x_0)) = f_M^n(x_0)$. Mais $(x_0, f_M(x_0), ..., f_M^{n-1}(x_0))$ forme une base de $\mathbb{C}^n$: on peut donc écrire $f_M^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f_M^k(x_0)$. Ainsi M est semblable à la matrice souhaitée. La réciproque est immédiate, en prenant comme U le premier vecteur de la matrice de passage dans la relation de similitude.

III.A.1) Q 22. Pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, on remarque que

$$f_M^k(u) = \sum_{i=1}^n u_1 f^k(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k u_i e_i,$$

donc la famille $(u, f_M(u), ..., f_M^{n-1}(u))$ est une base de $\mathbb{C}^n$ si, et seulement si la matrice de terme général $(u_i\lambda_i^{k-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est inversible, i.e. ssi la matrice $(U\Lambda)$ est inversible, où U est la matrice diagonale de diagonale $(u_1, ..., u_n)$ et Λ est la matrice de Vandermonde $(\lambda_i^{k-1})_{1\leqslant i,k\leqslant n}$.

Q 23. D'après la question précédente, si f_M est un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, il est cyclique ssi il existe une matrice diagonale U telle que $U\Lambda$ est inversible où Λ est la matrice de Vandermonde $(\lambda_i^{k-1})_{1\leqslant i,k\leqslant n}$, i.e. ssi Λ est inversible, i.e. ssi les valeurs propres de f_M sont deux à deux distinctes. Les vecteurs cycliques sont alors tous les $(u_1, ..., u_n)$ avec les u_i non nuls.

III.A.2) Q 24. On résout comme indiqué le système linéaire. Le système linéaire $C(a_0, ..., a_{n-1})X = \lambda X$ s'écrit

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_0x_n & = & \lambda x_1 \\ x_1 + a_1x_n & = & \lambda x_2 \\ & \vdots & \\ x_{n-2} + a_{n-2}x_n & = & \lambda x_{n-1} \\ x_{n-1} + a_{n-1}x_n & = & \lambda x_n \end{array}\right. ,$$

En effectuant la combinaison linéaire $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 + \lambda^2 L_3 + ... + \lambda^{n-1}L_n$, on obtient

$$a_0x_n + \lambda x_1 + \lambda a_1 x_n + ... + \lambda^{n-1}x_{n-1} + \lambda_{n-1}a_{n-1}x_n = \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + ... + \lambda^{n-1}x_{n-1} + \lambda^n x_n,$$

soit, après simplifications,

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k\lambda^k x_n = \lambda^n x_n,$$

i.e. $P(\lambda)x_n = 0$, avec $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, donc si $P(\lambda) \neq 0$, $x_n = 0$ et on en déduit que $x_1 = ... = x_{n-1} = 0$ donc $X = 0$ i.e. λ n'est pas valeur propre de $C(a_0, ..., a_{n-1})$. En revanche, si $P(\lambda) = 0$, il existe une solution X non triviale au système linéaire (le reste du système est échelonné), donc λ est valeur propre de $C(a_0, ..., a_{n-1})$.

Q 25. Le reste du système étant échelonné avec $n-1$ pivots, la dimension du sous-espace propre associé à λ est égale à 1. On a alors

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_{n-1} & = & (\lambda - a_{n-1})x_n \\ x_{n-2} & = & (\lambda^2 - \lambda a_{n-1} - a_{n-2})x_n \\ \vdots & & \\ x_k & = & \left(\lambda^{n-k} - \sum_{i=1}^{n-k} \lambda^{i-1}a_{n-i}\right)x_n \\ \vdots & & \\ x_1 & = & \left(\lambda^{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{i-1}a_{n-i}\right)x_n \end{array}\right. ,$$

Q 26. Soit M une matrice cyclique, $M = C(a_0, ..., a_{n-1})$. On sait que les valeurs propres de M sont les racines de $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, et qu'elles sont toutes de multiplicité 1. Pour que M soit diagonalisable, il faut donc qu'elle ait n valeurs propres distinctes, donc que P soit scindé à racines simples. x_0)

III.A.3) Commutant d'un endomorphisme cyclique

Q 27. Si $P \in \mathbb{C}[X]$, écrivons $P(X) = \sum_{k=0}^{d} p_k X^k$. Alors

$$f_M \circ P(f_M) = f_M \circ \left(\sum_{k=0}^{d} p_k f_M^k\right) = \sum_{k=0}^{d} p_k f_M^{k+1} = \left(\sum_{k=0}^{d} p_k f_M^k\right) \circ f_M = P(f_M) \circ f_M,$$

donc $P(f_M)$ et f_M commutent. Donc $P(f_M) \in \mathcal{C}(f_M)$.

Q 28. Écrivons $g(x_0) = \alpha_0 x + \alpha_1 f_M(x_0) + ... + \alpha_{n-1} f_M^{n-1}(x_0)$. Posons $h = a_0 \mathrm{Id} + a_1 f_M + a_2 f_M^2 + ... + a_{n-1} f_M^{n-1}$. Alors pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$,

$$\begin{aligned} g(f_M^k(x_0)) &= f_M^k(g(x_0)) \\ &= f_M^k\left(\alpha_0 x + \alpha_1 f_M(x_0) + ... + \alpha_{n-1} f_M^{n-1}(x_0)\right) = \alpha_0 f_M(x_0) + \alpha_1 f_M^2(x_0) + ... + \alpha_{n-1} f_M^n(x_0) = g(f_M^k(x_0)), \end{aligned}$$

Donc pour tout k, $g(f_M^k(x_0)) = g(f_M^k(x_0))$, donc g et h coïncident sur une base de $\mathbb{C}^n n$, donc sont égales, donc $g = \alpha_0 Id_{\mathbb{C}^n} + \alpha_1 f_M + ... + \alpha_{n-1} f_M^{n-1}$, i.e. g est un polynôme en f_M.

Q 29. On conclut donc que $\mathcal{C}(f_M) = \mathbb{C}[f_M] = \{P(f_M),\ P \in \mathbb{C}[f_M]\}$.

III.A.4) Q 30. N est triangulaire avec une diagonale nulle donc, si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc nulle, absurde. Elle possède une unique valeur propre, 0, donc l'espace propre associé est $\mathrm{Vect}(e_n)$ où e_n est le dernier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ (on a clairement e_n vecteur propre de N pour la valeur propre nulle et le rang de N se lit sur la matrice et est égal à $n-1$ donc son noyau est de dimension 1).

Q 31. Oui, N est cyclique, de vecteur cyclique e_1 : $Ne_1 = e_2$, etc. (où $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$).

Q 32. On remarque que la matrice N est une matrice cyclique. Son commutant est donc l'ensemble des polynômes en N. Or, $N^n = 0$, donc son commutant est l'ensemble des polynômes en N de degré inférieur ou égal à $n-1$. Donc le commutant de N est l'ensemble des matrices s'écrivant sous la forme

$$a_0 I_n + a_1 N + a_2 N^2 + ... + a_{n-1} N^{n-1} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & & & \vdots \\ a_2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire les matrices triangulaires inférieure avec les mêmes termes sur chaque diagonale, c'est-à-dire les matrices triangulaires inférieures de Toeplitz.

III.B – Quelques résultats de calcul matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Q 33. Posons $A = (a_{pq})_{1\leqslant p,q\leqslant n}$ et $B = (b_{pq})_{1\leqslant p,q\leqslant n}$. Alors si l'on pose $AB = (c_{pq})_{1\leqslant p,q\leqslant n}$, alors pour tous p et q dans $[\![1, n]\!]$,

$$c_{pq} = \sum_{k=1}^{n} a_{pk} b_{kq}.$$

Or, pour que $a_{pk}b_{kq}$ puisse être non nul, il faut (ce n'est pas suffisant) que $k - p = i$ et $q - k = j$, c'est-à-dire que $q - p = j + i$. Autrement dit si $q - p \neq i + j$, alors $c_{pq} = 0$. Cela signifique exactement que $AB \in \Delta_{ij}$.

Q 34. Si $A \in H_i$ et $B \in H_j$, on écrit $A = \sum_{k=i}^{r} A_k$ avec pour tout k dans $[\![i, n]\!]$, $A_k \in \Delta_k$, et $B = \sum_{k=j}^{r} B_k$, avec pour tout k dans $[\![j, n]\!]$, $B_k \in \Delta_k$, donc

$$AB = \sum_{k=i}^{n} \sum_{\ell=j}^{n} A_k B_\ell.$$

Or, pour tout k dans $[\![i, n]\!]$ et ℓ dans $[\![j, n]\!]$, $A_k B_\ell \in \Delta_{k+\ell} \subset_{i+j}$, car $k + \ell \geqslant i + j$.

III.B.1)

Q 35. Posons $A = I_n - C + C^2 - ... + (-1)^{n-1}C^{n-1}$. Alors

$$A(I_n + C) = I_n - C + C^2 - ... + (-1)^{n-1}C^{n-1} + C - C^2 + C^3 - ... + (-1)^{n-1}C^n = I_n,$$

donc $I_n + C$ est inversible d'inverse A : il s'agit bien d'un polynôme en C.

Q 36. On déduit le résultat de la proposition précédente. Si $C \in \Delta_k$, alors l'inverse de $I_n + C$ est $I_n - C + C^2 - ...$, et, par la question B.1), C^2 est dans Δ_{2k}, C^3 dans Δ_{3k}, etc., donc l'inverse de $I_n + C$ appartient à $\bigoplus_{p=0}^{n-1} \Delta_{pk}$.

Q 37. Écrivons que $P = I_n + C$ et $P^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C^k$. Alors

$$P^{-1}MP = \left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C^j\right)(M + MC) = M + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j C^j M + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C^j MC.$$

Si $j \geqslant 1$, $C^j \in \Delta_{j(k+1)}$, donc $C^j M \in \Delta_{j(k+1)+i} \subset H_{k+1}$. De même, si $j \geqslant 0$, $C^j MC \in \Delta_{k+1+i+j(k+1)} \subset H_{k+1}$, donc $P^{-1}MP = M + M'$ où $M' \in H_{k+1}$.

Q 38. De même, on écrit

$$\begin{aligned} P^{-1}NP &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C^j\right)(N + NC) \\ &= N + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j C^j N + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C^j NC = N + NC - CN + \sum_{j=2}^{n-1} (-1)^j C^j N + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C^j NC, \end{aligned}$$

et de la même manière, $\sum_{j=2}^{n-1} (-1)^j C^j N + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C^j NC \subset H_{k+1}$.

Q 39. Écrivons $A = N + \sum_{i=0}^{n-1} A^{(i)}$. Alors par linéarité de φ,

$$\varphi(A) = \varphi(N) + \varphi\left(\sum_{i=0}^{n-1} A^{(i)}\right) = N + NC - CN + \sum_{i=0}^{n-1} A^{(i)} + M,$$

où M est dans H_{k+1}. De plus, $NC - CN \in \Delta_k$, donc on obtient le résultat demandé.

III.C – L'opérateur de Sylvester

Q 40. On remarque que $\ker(\mathcal{S}) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid NX - XN = 0\} = \{X \in_n (\mathbb{R}) \mid NX = XN\} = \mathcal{C}(N)$, donc, d'après la question III.A.4, $\ker(\mathcal{S})$ est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.

Q 41. Comme $N \in \Delta_{-1}$, si $A \in \Delta_{k+1}$, $NA \in \Delta_k$ et $AN \in \Delta_k$, donc $NA - AN \in \Delta_k$, donc $\mathcal{S}(\Delta_{k+1}) \subset \Delta_k$. De même, ${}^tN \in \Delta_1$, donc si $A \in \Delta_k$, ${}^tNA$ et $A{}^tN$ sont dans Δ_{k+1}, donc $\mathcal{S}^*(\Delta_k) \subset \Delta_{k+1}$.

Q 42. Déjà, effectuons la vérification désirée. Soit X dans Δ_{k+1} et Y dans Δ_j. Alors

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}_{k+1}X, Y\rangle &= \langle NX - XN, Y\rangle \\ &= \operatorname{tr}({}^t(NX - XN)Y) \\ &= \operatorname{tr}({}^tX{}^tN -{}^t N{}^tX)Y) \\ &= \operatorname{tr}({}^tX{}^tNY) - \operatorname{tr}({}^tN{}^tXY) \\ &= \operatorname{tr}({}^tX{}^tNY) - \operatorname{tr}({}^tXY{}^tN) \\ &= \operatorname{tr}({}^tX({}^tNY - Y{}^tN)) = \langle X,{}^t NY - Y{}^tN\rangle = \langle X, \mathcal{S}^*(Y)\rangle, \end{aligned}$$

d'où le résultat désiré.

Ensuite, $\ker(\mathcal{S}_k^*)$ et $\mathrm{Im}(\mathcal{S}_{k+1})$ sont clairement dans Δ_k. Montrons qu'ils sont orthogonaux. Soit $X \in \ker(\mathcal{S}_k^*)$ et $Y \in \mathrm{Im}(\mathcal{S}_{k+1})$. Soit $Z \in \Delta_{k+1}$ tel que $Y = \mathcal{S}(Z)$. Alors

$$\langle X, Y\rangle = \langle X, \mathcal{S}(Z)\rangle = \langle \mathcal{S}(Z), X\rangle = \langle Z, S^*(X)\rangle = \langle Z, S_k^*(X)\rangle = \langle Z, 0\rangle = 0,$$

car $X \in \ker(\mathcal{S}_k^*)$. D'où l'orthogonalité des deux espaces. Enfin, $\ker(S^*)$ est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires supérieures, donc $\ker(S_k^*)$ est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires supérieures dans Δ_k, c'est-à-dire la droite $\mathbb{R}D_k$, de dimension 1. Ensuite, $\ker(\mathcal{S}_{k+1})$ est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures dans Δ_{k+1}, c'est-à-dire l'espace vectoriel nul. Donc $\mathcal{S}_{k+1}$ est surjective, donc la dimension de $\mathrm{Im}(\mathcal{S}_{k+1})$ est celle de $\Delta_{k+1} = n-k-1$ (la k-ième diagonale a $n-k$ termes). Donc $\dim(\ker(\mathcal{S}_\mathrm{k}^*))+\dim(\mathrm{Im}(\mathcal{S}_{\mathrm{k}+1})) = 1+\mathrm{n}-\mathrm{k}-1 = \mathrm{n}-\mathrm{k} = \dim(\Delta_\mathrm{k})$, donc, par égalité des dimensions, on a bien la somme désirée.

Q 43. On sait que $A^{(k)} \in \Delta_k$, donc on dispose de deux matrices U et V telles que $A = U + V$, $U \in \ker(\mathcal{S}_k^*)$ et $V \in \mathrm{Im}(\mathcal{S}_{k+1})$, i.e. U est dans Δ_k avec tous ses coefficients identiques et on dispose de C telle que $V = NC-CN$. Posons alors $P = I_n - C$. Alors, par la question 39, si $B = P^{-1}AP$, alors pour tout i dans $[\![-1, k-1]\!]$, $B^{(i)} = A^{(i)}$ et

$$B^{(k)} = A^{(k)} - NC + CN = U,$$

i.e. $B^{(k)}$ a tous ses coefficients identiques !

Q 44. Soit A une matrice cyclique. Alors $A = N + T$ où T est triangulaire supérieure. Alors, par le procédé précédent, A est semblable à une matrice B_0 telle que $B_0^{(-1)} = A^{(-1)}$ et telle que la diagonale 0 de B_0 ait tous ses coefficients identiques. Ensuite, B_0 est semblable à une matrice B_1 telle que $B_0^{(-1)} = B_1^{(-1)}$, que $B_0^{(0)} = B_1^{(0)}$ et que $B_1^{(1)}$ ait tous ses coefficients identiques. A est aussi semblable à B_1 par transitivité. En réitérant ce processus jusqu'à $n-1$, on obtient une matrice de Toeplitz semblable à A.

• • • FIN • • •