 nlaillet.math@gmail.com

# TD 10
# Séries entières

**Exercice 1.** *Banque CCINP MP.*

**1.** Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

**Correction**

*Corrigé officiel de CCINP* Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum a_n z^n$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par : $R = \sup\{r \geqslant 0 / (a_n r^n)$ est bornée $\}$. On peut aussi définir le rayon de convergence de la manière suivante : $\exists! R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que :

- $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument.
- $\forall z \in \mathbb{C}, |z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ diverge (grossièrement).

$R$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Remarque : pour une série entière de la variable réelle, la définition est identique.

**2.** Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

(a) $\displaystyle\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.

**Correction**

Notons $R$ le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$ et posons : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}$, $u_n(z) = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.
Pour $z = 0$, $\sum u_n(0)$ converge.
Pour $z \neq 0$, $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \dfrac{n+1}{4n+2}|z|^2$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \dfrac{|z|^2}{4}$.
D'après la règle de d'Alembert,
Pour $|z| < 2$, la série numérique $\sum u_n(z)$ converge absolument.
Pour $|z| > 2$, la série numérique diverge grossièrement.
On en déduit que $R = 2$.

(b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$.

**Correction**

Notons $R$ le rayon de convergence de $\sum n^{(-1)^n} z^n$ et posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = n^{(-1)^n}$.

On a, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, |a_n z^n| \leqslant |n z^n|$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum n z^n$ vaut 1 . Donc $R \geqslant 1$. (*)
De même, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, \left|\dfrac{1}{n} z^n\right| \leqslant |a_n z^n|$ et le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} z^n$ vaut 1 .
Donc $R \leqslant 1$. (**)
D'après (*) et (**), $R = 1$.

(c) $\sum \cos(n) z^n$.

**Correction**

Notons $R$ le rayon de convergence de $\sum \cos n z^n$ et posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \cos n$.

On a, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, |a_n z^n| \leqslant |z^n|$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ vaut 1 . Donc $R \geqslant 1$. (*)
Pour $z = 1$, la série $\sum \cos n z^n = \sum \cos n$ diverge grossièrement car $\cos n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.
Donc $R \leqslant 1$. (**)
D'après (*) et (**), $R = 1$.

**Exercice 2.** *Banque CCINP MP*.

**1.** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

**Correction**

Notons $R$ le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$. Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \frac{x^n}{(2n)!}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

On en déduit que la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $R = +\infty$.

**2.** Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.

**Correction**

*Corrigé officiel de CCINP* $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et le rayon de convergence du développement en série entière de la fonction ch est égal à $+\infty$.

**3.** (a) Déterminer $S(x)$.

**Correction**

Pour $x \geqslant 0$, on peut écrire $x = t^2$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(t) = \mathrm{ch}\,\sqrt{x}$.

Pour $x < 0$, on peut écrire $x = -t^2$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos(t) = \cos\sqrt{-x}$.

(b) On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \operatorname{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0$$

Démontrer que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

**Correction**

D'après la question précédente, la fonction $f$ n'est autre que la fonction $S$. $S$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car développable en série entière à l'origine avec un rayon de convergence égal à $+\infty$. Cela prouve que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 3.** *Nombres de Catalan, d'après écrit Centrale PC et MP 2021*. Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $C_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

On note $R$ le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} C_n x^n$ et on désigne sa somme par $f$. On suppose déjà que $R > 0$.

**1.** Montrer que $xf(x)^2 - f(x) + 1 = 0$ pour tout $x \in ]-R, R[$.

**Correction**

Soit $x \in ]-R, R[$. Alors, par produit de Cauchy de deux séries entières,

$$xf(x)^2 = x \sum_{n\geqslant 0} u_n x^n,$$

où $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} = C_{n+1}$. Donc

$$\begin{aligned} xf(x)^2 &= x \sum_{n\geqslant 0} C_{n+1} x^n \\ &= \sum_{n\geqslant 1} C_n x^n \\ &= f(x) - C_0 = f(x) - 1. \end{aligned}$$

D'où l'équation attendue.

**2.** On note $r = \min\left(R, \dfrac{1}{4}\right)$. Démontrer que pour tout $x$ dans $]-r, r[$, il existe $\varepsilon(x) \in \{-1, 1\}$ tel que

$$f(x) = \frac{1 + \varepsilon(x)\sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

**Correction**

Soit $x$ fixé dans $]-r, r[ = ]-R, R[ \cap \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$. Alors

$$x(f(x))^2 - f(x) + 1 = 0,$$

donc $f(x)$ est solution d'une équation de second degré, de discriminant $1 - 4x > 0$ car

 nlaillet.math@gmail.com

$x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. Donc

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \text{ ou } f(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2},$$

donc on dispose bien de $\varepsilon(x) \in \{-1, 1\}$ tel que

$$f(x) = \frac{1+\varepsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2}.$$

**3.** Démontrer que $\varepsilon$ est continue sur $]-r, r[$, que $f$ est continue en 0 et en déduire que pour tout $x \in ]-r, r[$, $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

**Correction**

On remarque qu'alors pour $x \in ]-r, r[$,

$$\varepsilon(x) = \frac{2f(x)-1}{\sqrt{1-4x}},$$

qui est une fonction continue. Mais $\varepsilon(0) = 2f(0) - 1 = -1$ donc $\varepsilon$ est constante égale à $-1$ (sinon, $\varepsilon$ prendrait les valeurs 1 et $-1$ donc, étant continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annulerait, ce qui est absurde). On en déduit que pour tout $x$ dans $]-r, r[$,

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

**4.** En déduire une expression de $C_n$ pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, et déterminer le rayon de convergence de $f$.

**Correction**

On effectue alors le développement en série entière de $f$ : on effectue déjà celui de

 nlaillet.math@gmail.com

$\sqrt{1-4x}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1-4x} &= 1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{2}\times\frac{-1}{2}\times\frac{-3}{2}\times\cdots\times\frac{-(2n-3)}{2}(-4x)^n\\ &= 1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)(-4x)^n\\ &= 1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)(-1)^n4^nx^n\\ &= 1-\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}4^n\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)x^n\\ &= 1-\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}4^n\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}x^n\\ &= 1-2\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}x^n\\ &= 1-2\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1-\left(1-2\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n\right)}{2x}\\ &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^{n-1}\\ &= \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n.\end{aligned}$$

Donc, **si** $R>0$, $C_n=\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.
Mais on a fait cette hypothèse de $R>0$, on a fait une **analyse**.
Pour la synthèse, si on pose $g(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$, alors $g$ a un rayon de convergence égal à $\dfrac{1}{4}$ (on le voit avec la règle de D'Alembert) et $xg(x)^2-g(x)+1=0$, ce qui implique que, si l'on pose $a_n=\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$, alors $a_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}$, donc $(a_n)$ suit exactement la même relation de récurrence que $C_n$, donc, comme $a_0=C_0$, $a_n=C_n$ pour tout $n$.
Finalement, $f$ et $g$ sont les mêmes séries entières donc le rayon de convergence de $f$ est de $\dfrac{1}{4}$.

**Exercice 4.** *ENSEA 24*. Soit $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ avec $a_n=\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

**1.** Déterminer le rayon de convergence $R$ de cette série entière.

**Correction**

On remarque que pour tout $t$ dans $[0,1]$,

$$\frac{t^n}{3} \leqslant \frac{t^n}{2+t^2} \leqslant \frac{t^n}{2}$$

donc

$$\frac{1}{3(n+1)} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{2(n+1)},$$

Mais comme le rayon de convergence de $\sum \frac{1}{n+1}x^n$ est de 1, on en déduit que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est aussi de 1.

**2.** Pour $x \in ]-R,R[$ trouver une expression simple de $f(x)$.

**Correction**

Soit $x \in ]-1,1[$. On veut calculer

$$\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 \frac{(tx)^n}{2+t^2}dt.$$

On considère $f_n : t \mapsto \frac{(tx)^n}{2+t^2}$ et on remarque que

$$|f_n(t)| \leqslant \frac{|x|^n}{2},$$

terme indépendant de $t$ et terme général d'une série convergente. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 f_n(t)dt &= \int_0^1 \sum_{n\geqslant 0} f_n(t)dt \\
&= \int_0^1 \sum_{n\geqslant 0} \frac{(tx)^n}{2+t^2}dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(2+t^2)(1-tx)}dt \\
&= \int_0^x \frac{1}{\left(2+\left(\frac{u}{x}\right)^2\right)(1-u)}\frac{1}{x}du \\
&= x\int_0^x \frac{1}{(2x^2+u^2)(1-u)}du
\end{aligned}$$

On cherche ensuite $a$, $b$ et $c$ tels que

$$\frac{1}{(2x^2+u^2)(1-u)} = \frac{au+b}{2x^2+u^2} + \frac{c}{1-u}.$$

En multipliant par $1-u$ et en évaluant en 1, on obtient $c = \frac{1}{2x^2+1}$.
En multipliant par $u$ et en faisant tendre $u$ vers $+\infty$, on obtient $a-c=0$ donc $a = \frac{1}{2x^2+1}$. En évaluant en 0, on obtient

$$\frac{1}{2x^2} = \frac{b}{2x^2} + c,$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

donc
$$b = 1 - 2x^2 c = 1 - \frac{2x^2}{2x^2+1} = \frac{1}{2x^2+1}.$$
Donc
$$\begin{aligned}
x\int_0^x \frac{1}{(2x^2+u^2)(1-u)}du &= \frac{x}{2x^2+1}\int_0^x \frac{u+1}{2x^2+u^2} + \frac{1}{1-u}du \\
&= \frac{x}{2x^2+1}\int_0^x \frac{1}{2}\frac{2}{2x^2+u^2} + \frac{1}{2x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{2}x}\right)^2} + \frac{1}{1-u}du \\
&= \frac{x}{2x^2+1}\left[\frac{1}{2}\ln(2x^2+u^2) + \frac{1}{\sqrt{2}x}\mathrm{Arctan}\left(\frac{u}{\sqrt{2}x}\right) - \ln(1-u)\right]_0^x \\
&= \frac{x}{2x^2+1}\left(\frac{1}{2}\ln(3/2) + \frac{1}{\sqrt{2}x}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \ln(1-x)\right)
\end{aligned}$$
D'où l'expression « simple » de $f(x)$...

**Exercice 5.** *Mines-Télécom 24*. Soit $f : x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$.

**1.** Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

**Correction**

Comme $g : x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}}$ est $\mathscr{C}^\infty$ et que $h : x \mapsto \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ est dérivable (par le théorème fondamental du calcul intégral), de dérivée $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$, on en déduit que $h$ est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que, donc, $f = gh$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

**2.** Trouver une équation différentielle d'ordre 1 satisfaite par $f$.

**Correction**

Pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = xf(x) + e^{\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} = xf(x) + 1.$$

**3.** En déduire le développement de $f$ en série entière.

**Correction**

On suppose que $f$ admet un développement en série entière. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $r > 0$ tels que pour tout $x$ dans $]-r, r[$,

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n.$$

Alors $f$ est dérivable sur $]-r, r[$ et pour $x$ dans $]-r, r[$,

$$f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) - xf(x) &= \sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n\geqslant 0} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n\geqslant 1} a_{n-1} x^n \\ &= a_1 + \sum_{n\geqslant 1} \left((n+1) a_{n+1} - a_{n-1}\right) x^n. \end{aligned}$$

Donc, par unicité du développement en série entière, on en déduit que $a_0 = 0$ (valeur de $f$ en 0), $a_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{n+1}$, i.e. pour tout $n \geqslant 0$,

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{n+2}$$

Ainsi, pour tout $n$ pair, $a_n = 0$ et pour $n$ impair, disons $n = 2p+1$,

$$a_{2p+1} = \frac{a_{2p-1}}{2p+1} = \cdots = \frac{1}{(2p+1)(2p-1)\cdots \times 3 \times 1} = \frac{2p \times (2p-2) \times \cdots \times 2}{(2p+1)!} = \frac{2^p p!}{(2p+1)!}.$$

Donc

$$f(x) = \sum_{p\geqslant 0} \frac{2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

On vérifie maintenant que cette série entière a un rayon de convergence non nul et qu'elle est bien égale à $f$. Soit $x \neq 0$. On applique la règle de D'Alembert au terme entier :

$$\frac{\frac{2^{p+1}(p+1)!}{(2p+3)!}|x|^{2p+3}}{\frac{2^p p!}{(2p+1)!}|x|^{2p+1}} = \frac{2(p+1)}{(2p+2)(2p+3)}|x|^2 \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc la série converge quelle que soit la valeur de $x$, ce qui signifie que la série entière $\sum \frac{2^p p!}{(2p+1)!}x^{2p+1}$ a un rayon de convergence infini. En remontant les étapes faites précédemment, on remarque que si $g(x) = \sum_{p\geqslant 0} \frac{2^p p!}{(2p+1)!}x^{2p+1}$, alors $g'(x) - xg(x) = 1$ et que $g(0) = f(0)$ donc, par le théorème de Cauchy, $g = f$ et $f$ est bien développable en série entière sur tout $\mathbb{R}$.

**Exercice 6.** *CCINP 24*. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

**1.** Vérifier que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $(4n+2)a_{n+1} = (n+1)a_n$.

**Correction**

Soit $n$ dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}(4n+2)a_{n+1} &= (4n+2)\frac{1}{\binom{2(n+1)}{n+1}} \\ &= (4n+2)\frac{(n+1)!^2}{(2n+2)!} \\ &= (4n+2)\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\frac{(n!)^2}{(2n)!} \\ &= (n+1)a_n,\end{aligned}$$

d'où le résultat demandé.

**2.** Donner le rayon de convergence de $f$, que l'on notera $R$.

**Correction**

Comme $a_n \neq 0$ pour tout $n$, on peut appliquer la règle de D'Alembert :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{4n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4},$$

donc $R = 4$.

**3.** Montrer que : $\forall x \in ]-R, R[, x(4-x)f'(x) - (x+2)f(x) + 2 = 0$.

**Correction**

Soit $x \in ]-R, R[$. Alors

$$\begin{aligned}
x(4-x)f'(x) &= (4x-x^2)f'(x) \\
&= (4x-x^2)\sum_{n\geqslant 1} na_n x^{n-1} \\
&= 4\sum_{n\geqslant 1} na_n x^n - \sum_{n\geqslant 1} na_n x^{n+1} \\
&= 4\sum_{n\geqslant 1} na_n x^n - \sum_{n\geqslant 2}(n-1)a_{n-1}x^n \\
&= 4a_1x + \sum_{n\geqslant 2}\left(4na_n - (n-1)a_{n-1}\right)x^n. \quad = 2x + \sum_{n\geqslant 2}\left(4na_n - (n-1)a_{n-1}\right)x^n.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
(x+2)f(x) &= \sum_{n\geqslant 0} a_n x^{n+1} + 2\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \\
&= 2a_0 + \sum_{n\geqslant 1}(a_{n-1}+2a_n)x^n \\
&= 2a_0 + (a_0+2a_1)x + \sum_{n\geqslant 2}(a_{n-1}+2a_n)x^n \\
&= 2 + 2x + \sum_{n\geqslant 2}(a_{n-1}+2a_n)x^n.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
x(4-x)f'(x) - (x+2)f(x) &= 2x + \sum_{n\geqslant 2}\left(4na_n - (n-1)a_{n-1}\right)x^n - 2 - 2x - \sum_{n\geqslant 2}(a_{n-1}+2a_n)x^n \\
&= -2 + \sum_{n\geqslant 2}\left(4na_n - (n-1)a_{n-1} - a_{n-1} - 2a_n\right)x^n \\
&= -2 + \sum_{n\geqslant 2}\left((4n-2)a_n - na_{n-1}\right)x^n \\
&= -2,
\end{aligned}$$

par la relation de récurrence trouvée à la question précédente. Le résultat est ainsi prouvé.

**4.** En posant $u = \sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$, trouver une primitive de $\dfrac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}$ sur $]0, 4[$.

**Correction**

On imagine que ceci nous aidera à déterminer $f$ par méthode de variation de la constante. On cherche à calculer $\displaystyle\int^x \frac{\sqrt{4-t}}{t\sqrt{t}}dt$ On pose $u = \sqrt{\dfrac{4-t}{t}}$, et on a alors

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{4-t}\sqrt{t}} - \frac{\sqrt{4-t}}{2t\sqrt{t}} = -\frac{t+4-t}{2t\sqrt{t}} = -\frac{2}{t\sqrt{4-t}\sqrt{t}}$$

On exprime enfin $t$ en fonction de $u$ : $u^2 t = 4-t$ donc $t = \dfrac{4}{u^2+1}$. On a donc, en

 nlaillet.math@gmail.com

particulier,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{4-t}}{t\sqrt{t}} &= \frac{4-t}{t\sqrt{4-t}\sqrt{t}} \\ &= u^2 t\frac{1}{t\sqrt{4-t}\sqrt{t}} \\ &= \frac{u^2}{u^2+1}\frac{4}{t\sqrt{4-t}\sqrt{t}} \\ &= -2\frac{u^2}{u^2+1}\frac{du}{dt}\end{aligned}$$

On en déduit donc, par changement de variables, que

$$\begin{aligned}\int^x \frac{\sqrt{4-t}}{t\sqrt{t}}dt &= -2\int^{\sqrt{\frac{4-x}{x}}} \frac{u^2}{u^2+1}du \\ &= -2\int^{\sqrt{\frac{4-x}{x}}} 1-\frac{1}{u^2+1}du \\ &= -2\sqrt{\frac{4-x}{x}} + 2\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right).\end{aligned}$$

**5.** Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\dfrac{x+2}{x(4-x)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{4-x}$. Trouver enfin l'expression de $f(x)$.

**Correction**

On remarque que

$$\frac{1}{2x} + \frac{3}{2(4-x)} = \frac{4-x+3x}{2x(4-x)} = \frac{x+2}{x(4-x)}.$$

On sait ensuite que, sur $]0,4[$, $f$ est solution de l'équation différentielle

$$f'(x) - \frac{x+2}{x(4-x)}f(x) = \frac{-2}{x(4-x)}$$

Or, une primitive de

$$\frac{x+2}{x(4-x)} = \frac{1}{2x} + \frac{3}{2(4-x)}$$

est

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{3}{2}\ln(4-x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}\right),$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto \lambda\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ensuite, on fait une méthode de variation de la constante pour déterminer exactement $f$. On pose

$$g : x \mapsto \frac{f(x)}{\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}}.$$

Alors, comme $f'(x) - \dfrac{x+2}{x(4-x)}f(x) = \dfrac{-2}{x(4-x)}$, on en déduit que

$$g'(x)\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}} = \frac{-2}{x(4-x)},$$

donc que
$$g'(x) = \frac{-2(4-x)^{3/2}}{\sqrt{x}x(4-x)} = -2\frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}.$$
Comme une primitive de $x \mapsto \dfrac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}$ est
$$x \mapsto -2\sqrt{\frac{4-x}{x}} + 2\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right),$$
on en déduit que l'on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$g(x) = \lambda + 4\sqrt{\frac{4-x}{x}} - 4\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right),$$
donc
$$f(x) = \lambda\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}} + \frac{4}{4-x} - 4\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right).$$
Pour déterminer $\lambda$, on rappelle que $f$ et $f'$ sont continues en 0, que $f(0) = 1$ et $f'(0) = \dfrac{1}{\binom{2}{1}} = \dfrac{1}{2}$. L'information $f(0) = 1$ ne nous apporte rien. En revanche,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lambda\frac{x+2}{\sqrt{x}(4-x)^{5/2}} + \frac{4}{(4-x)^2} - 4\frac{x+2}{\sqrt{x}(4-x)^{5/2}}\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) + 4\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}\frac{1}{2\sqrt{4-x}\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+2}{\sqrt{x}(4-x)^{5/2}}\left(\lambda - 4\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right)\right) + \frac{6}{(4-x)^2} \end{aligned}$$
Pour que cette quantité tende vers une limite finie en 0, il faut que
$$\lambda - 4\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$
donc que $\lambda = 4\dfrac{\pi}{2} = 2\pi$.
Finalement,
$$f(x) = 2\pi\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}} + \frac{4}{4-x} - 4\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right).$$

**Exercice 7.** *CCINP 24*. Soit $n \in \mathbb{N}$, $(u_n)$ est la suite définie par
$$u_0 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k u_{n-k}.$$

**1.** Énoncer le théorème du produit de Cauchy pour des séries absolument convergentes.

**Correction**

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les termes généraux de séries convergentes, alors la série de terme général $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est convergente et

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n = \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} b_n\right).$$

**2.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \frac{u_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$.

**Correction**

On démontre le résultat par récurrence forte sur $n$.
L'**initialisation** est vraie car $0 \leqslant \frac{u_0}{0!} = 3 \leqslant 4^{0+1}$.
Pour l'**hérédité**, soit $n$ dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout $k$ dans $[\![0, nb]\!]$, $0 \leqslant \frac{u_k}{k!} \leqslant 4^{k+1}$. Alors, comme

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k},$$

on a clairement $u_{n+1} \geqslant 0$ par hypothèse de récurrence et, de même,

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} u_k u_{n-k} &= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} k!\frac{u_k}{k!}(n-k)!\frac{u_{n-k}}{(n-k)!}\\
&\leqslant \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} k!4^{k+1}(n-k)!4^{n-k+1}\\
&\leqslant 4^{n+2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{(n+1)!}k!(n-k)!\\
&\leqslant 4^{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{(n+1)!}k!(n-k)!\\
&\leqslant 4^{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1} = 4^{n+2},
\end{aligned}$$

d'où l'hérédité et le résultat !

**3.** On considère $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$. Montrer que $f$ est définie au moins sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ et est une solution de l'équation différentielle $y' = y^2$.

**Correction**

Soit $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. Alors

$$\left|\frac{u_n}{n!} x^n\right| \leqslant 4.(4|x|)^n,$$

terme général d'une série convergente. Donc $f$ est définie au moins sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. Ensuite, $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur le disque ouvert de convergence donc, en particulier, $f$ est dérivable et pour tout $x$ dans $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!} \frac{u_{n-k}}{(n-k)!} x^n. \end{aligned}$$

On reconnaît le produit de Cauchy de deux séries entières et on obtient alors

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n\right) = f(x)^2.$$

**4.** (a) Montrer que $f$ ne s'annule pas sur $\left[0, \frac{1}{4}\right[$.

**Correction**

Par (stricte) positivité des $u_n$, on a pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant u_0 = 3$, donc $f$ ne s'annule pas.

(b) En déduire $u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**Correction**

Comme $f$ ne s'annule pas, on en déduit que

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{4}\right[, \ \frac{f'(x)}{f(x)^2} = 1,$$

donc, en intégrant, on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{4}\right[, \ \frac{1}{f(x)} = \lambda - x.$$

Mais comme $f(0) = 3$, $\lambda = \dfrac{1}{3}$ donc

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{4}\right[, \ f(x) = \frac{1}{\frac{1}{3} - x} = \frac{3}{1-3x} = \sum_{n\geqslant 0} 3^{n+1}x^n.$$

Donc, par unicité du développement en série entière, on en déduit que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$,

$$\frac{u_n}{n!} = 3^{n+1} \text{ donc } u_n = 3^{n+1}n!$$

(c) Déterminer le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.

**Correction**

On fait une règle de D'Alembert, qui nous montre que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$ est nul...

**Exercice 8.** *CCINP 24*. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n)x^n$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)x^n$.

**1.** Déterminer les rayons de convergence de $f$ et $g$.

**Correction**

Pour $n \geqslant 2$, $\ln(n) \neq 0$ et $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc le rayon de convergence de $f$ est 1.
Pour $n \geqslant 2$, $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \neq 0$ et

$$\left|\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc le rayon de convergence de $g$ est 1.

**2.** Montrer que $g$ est définie et continue sur $[-1, 1[$.

**Correction**

Déjà, $g$ est définie et continue sur $]-1, 1[$ comme somme d'une série entière.
Ensuite, pour étudier la fonction en $-1$, on note $\varphi_n(x) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)x^n$. Pour $x \in$

$[-1,0]$, on note même

$$\varphi_n(x) = (-1)^{n+1}\left|\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right||x|^n.$$

On a alors $g(x) = \sum_{n\geqslant 0}\varphi_n(x)$. La suite $\left(\left|\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right||x|^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante (comme produit de fonctions décroissantes positives) tendant vers 0 donc, d'après le critère des séries alternées, la série de fonctions $\sum\varphi_n$ converge simplement sur $[-1,0]$ et on sait que

$$\left|\sum_{k\geqslant n}\varphi_k(x)\right| \leqslant \left|\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right||x|^{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1},$$

quantité indépendante de $x$ et tendant vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$. Donc la série de fonctions $\sum\varphi_n$ converge uniformément sur $[-1,0]$. Comme chaque $\varphi_n$ est continue sur $[-1,0]$, on en déduit que $g$ est continue sur $[-1,0]$. $g$ étant continue sur $]-1,1[$ elle est, au final, continue sur $[-1,1[$.

**3.** Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$ pour $x\in]-1,1[$.

**Correction**

Soit $x\in]-1,1[$. Alors

$$\begin{aligned}(1-x)f(x) &= (1-x)\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(n)x^n\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\ln(n)x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}\ln(n)x^{n+1}\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\ln(n)x^n - \sum_{n=3}^{+\infty}\ln(n-1)x^n\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\ln(n)x^n - \sum_{\boxed{n=2}}^{+\infty}\ln(n-1)x^n \text{ car } \ln(2-1)=0\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\ln(n)-\ln(n-1)\right)x^n\\ &= -\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n\\ &= -g(x).\end{aligned}$$

**4.** Montrer que $f$ est continue sur $]-1,1[$ et prolongeable par continuité en -1 .

**Correction**

En faisant tendre $x$ vers $-1$, on remarque que $1-x$ tend vers 2 donc $(1-x)f(x) \underset{x\to-1}{\sim} 2f(x)$. De plus, $-g(x) \underset{x\to-1}{\longrightarrow} -g(-1)$ donc $f(x) \underset{x\to-1}{\longrightarrow} \frac{-g(-1)}{2}$, donc $f$ est prolongeable par continuité en $-1$.

**5.** Trouver un équivalent de $g$, puis de $f$, en $1^-$.
*On pourra s'intéresser à* $\sum_{n\geqslant 0} -\frac{1}{n}x^n$ *en* $1^-$ *dans un premier temps.*

**Correction**

Question un peu délicate en PSI... On a envie de dire, pour $g$, que $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$ et donc que $g$ se comporte « comme » $\sum_{n\geqslant 0} -\frac{1}{n}x^n$ en $1^-$, i.e. comme $\ln(1-x)$. On étudie alors

$$g(x) - \ln(1-x) = \sum_{n\geqslant 2}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\right)x^n + x.$$

On note $\psi_n(x) = \left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\right)x^n$. Pour $x\in[0,1]$,

$$|\psi_n(x)| \leqslant \left|\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\right| = a_n,$$

et

$$\begin{aligned} a_n &\underset{n\to+\infty}{=} \left|-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}, \end{aligned}$$

donc la série de terme général $a_n$ converge, donc la série de fonctions $\sum psi_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,1]$, donc $\sum \psi_n$ est continue en 1, donc $g(x) - \ln(1-x)$ est prolongeable par continuité en 1 :

$$g(x) - \ln(1-x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$g(x) \underset{x\to 1}{=} \ln(1-x) + \ell + o(1) \underset{x\to 1}{\sim} \ln(1-x).$$

Finalement,

$$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

**Exercice 9.** *Mines-Ponts 24*. Soit $(E)$ l'équation différentielle : $x^2y'(x) + y(x) = x^2$.

**1.** Montrer que $(E)$ n'admet pas de solution développable en série entière.

**Correction**

Supposons que $(E)$ admette une solution développable en série entière, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$.

Alors pour $x$ dans l'intervalle de convergence,

$$\begin{aligned} x^2 f'(x) + f(x) &= x^2 \sum_{n\geqslant 1} a_n n x^{n-1} + \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \\ &= \sum_{n\geqslant 1} a_n n x^{n+1} + \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \\ &= \sum_{n\geqslant 2} a_{n-1}(n-1)x^n + \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \\ &= a_0 + a_1 x + \sum_{n\geqslant 2} \left((n-1)a_{n-1} + a_n\right) x^n. \end{aligned}$$

Comme $x^2 f'(x) + f(x) = x^2$, on en déduit, par unicité du développement en série entière, que $a_0 = a_1 = 0$ et pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = (n-1)a_{n-1}$. Mais comme $a_1 = 0$, par récurrence immédiate, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $a_n = 0$... donc $f$ est nulle, ce qui est absurde !

**2.** Résoudre l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$.

**Correction**

On résout d'abord l'équation homogène. Sur $]0, +\infty[$, elle s'écrit

$$y' + \frac{1}{x^2} y = 0,$$

et l'ensemble des solutions de cette équation est

$$\left\{ x \mapsto \lambda e^{\frac{1}{x}},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

On résout ensuite l'équation avec second membre. Soit $f$ une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g : x \mapsto f(x)e^{-\frac{1}{x}}$. Alors on a $f(x) = g(x)e^{\frac{1}{x}}$ et on a les équivalences

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de (E)} &\Leftrightarrow \forall x \in ]0, +\infty[,\ x^2 f'(x) + f(x) = x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in ]0, +\infty[,\ x^2 g'(x) e^{\frac{1}{x}} = x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in ]0, +\infty[,\ g'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda > 0,\ \forall x \in ]0, +\infty[,\ g(x) = \lambda + \int_1^x e^{-\frac{1}{t}} dt \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda > 0,\ \forall x \in ]0, +\infty[,\ f(x) = \lambda e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} \int_1^x e^{-\frac{1}{t}} dt. \end{aligned}$$

**Exercice 10.** *Mines-Ponts 24*. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la suite de fonctions définie par, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ et $x$ dans $\mathbb{R}$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

**1.** Pour quelles valeurs de $a$ la série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$ ? On suppose cette condition remplie dans la suite et l'on pose : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

**Correction**

Distinguons les cas :

- si $a > 0$, alors $\left|\mathrm{e}^{-n^a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right| = \mathrm{e}^{-n^a} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc, par comparaison à une série de Riemann, la série numérique $\sum \mathrm{e}^{-n^a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ converge absolument donc converge, ce quelle que soit la valeur de $x$,
- si $a \leqslant 0$, alors, pour $x = 0$, $f_n(0) = \mathrm{e}^{-n^a}$, qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$, donc la série diverge grossièrement.

Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si $a > 0$. Dans ce cas, elle converge même normalement.

**2.** Montrer que $S$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $S^{(k)}(0)$.

**Correction**

Il s'agit d'appliquer un théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série de fonctions. On remarque que :

- pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ et
$$f_n^{(k)}(x) = \mathrm{e}^{-n^a}(in)^k\mathrm{e}^{inx},$$
- pour $k$ et $n$ entiers naturels,
$$|f_n^{(k)}(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-n^a}n^k \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n^2),$$
donc $\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty$ est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $S$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et
$$S^{(k)}(0) = \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n^a}(in)^k$$

**3.** En utilisant le théorème de Fubini, montrer que pour $a > 1$, $S$ est développable en série entière en 0.

**Correction**

C'est une mauvaise question, car le théorème de Fubini n'est utilisé que dans le cadre de la théorie des probabilités...
On veut savoir si la série de terme général
$$\frac{S^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

converge pour $x$ suffisamment proche de 0. Pour ce faire, on va démontrer que la famille $\left(\frac{e^{-n^a}(in)^k}{k!}x^k\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. On calcule

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0}\left|\frac{e^{-n^a}(in)^k}{k!}x^k\right| &= \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0}\frac{e^{-n^a}n^k}{k!}|x|^k\\ &= \sum_{n\geqslant 0}e^{-n^a}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(|x|n)^k}{k!}\\ &= \sum_{n\geqslant 0}e^{-n^a+|x|n}\end{aligned}$$

Or, quel que soit $x$, comme $a > 1$, $e^{-n^a+|x|n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n^2)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-n^a+|x|n} < +\infty$.

Donc la famille $\left(\frac{e^{-n^a}(in)^k}{k!}x^k\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{S^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

converge pour tout $x$ réel, donc la série de Taylor de $S$ converge quel que soit $x$, donc $S$ est développable en série entière au voisinage de 0.

**Exercice 11.** *Centrale 24*. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{-3\}$ on pose $f(z) = \frac{3z}{3+z}$.

**1.** Montrer que $f$ est développable en série entière au voisinage de 0.

**Correction**

On écrit que

$$f(z) = \frac{z}{1+\frac{z}{3}}.$$

Or, $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est développable en série entière sur le disque unité ouvert. Donc $f$ est développable en série entière au voisinage de 0 et, si $|z| < 3$, alors

$$f(z) = z\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{z^n}{3^n} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{3^n}z^{n+1} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}z^n$$

**2.** Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $g(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{5+3\cos(\theta)}$. Calculer $\operatorname{Im}\left(f\left(e^{i\theta}\right)\right)$ puis montrer que l'on peut écrire : $g(\theta) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\theta)$, où les $b_k$ sont des réels à préciser.

**Correction**

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

On calcule déjà

$$\begin{aligned}
f\left(e^{i\theta}\right) &= \frac{3e^{i\theta}}{3+e^{i\theta}} \\
&= \frac{3e^{i\theta}}{3+\cos(\theta)+i\sin(\theta)} \\
&= \frac{3e^{i\theta}(3+\cos(\theta)-i\sin(\theta))}{(3+\cos(\theta))^2+\sin(\theta)^2} \\
&= \frac{3(\cos(\theta)+i\sin(\theta))(3+\cos(\theta)-i\sin(\theta))}{(3+\cos(\theta))^2+\sin(\theta)^2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Im}(f(e^{i\theta})) &= 3\frac{\sin(\theta)(3+\cos(\theta))-\sin(\theta)\cos(\theta)}{9+6\cos(\theta)+\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2} \\
&= 3\frac{\sin(\theta))}{10+6\cos(\theta)} \\
&= \frac{3}{2}g(\theta)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
g(\theta) &= \frac{2}{3}\mathfrak{Im}(f(e^{i\theta})) \\
&= \frac{2}{3}\mathfrak{Im}\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}e^{in\theta}\right) \\
&= \frac{2}{3}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\sin(n\theta),
\end{aligned}$$

d'où le résultat avec $b_k = 2\dfrac{(-1)^{k-1}}{3^k}$.

**3.** Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi/3} g(\theta)\mathrm{d}\theta$. En déduire une somme remarquable.

**Correction**

Si on note $\varphi_n : \theta \mapsto b_n\sin(n\theta)$, étant donné que $\sum |b_n|$ converge, on en déduit que la série de fonctions $\sum \varphi_n$ converge normalement, donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi/3} g(\theta)d\theta &= \frac{2}{3}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\int_0^{2\pi/3}\sin(n\theta)d\theta \\
&= \frac{2}{3}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\left[-\frac{\cos(n\theta)}{n}\right]_0^{2\pi/3} \\
&= \frac{2}{3}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\frac{1-\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n} \\
&= \frac{2}{3}\sum_{\substack{n\geqslant 0\\ 3 \text{ ne divise pas } n}}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\frac{1-\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n} \\
&= \frac{2}{3}\sum_{\substack{n\geqslant 0\\ 3 \text{ ne divise pas } n}}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\frac{3}{2n} \\
&= \sum_{\substack{n\geqslant 0\\ 3 \text{ ne divise pas } n}}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}.
\end{aligned}$$

Mais, d'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin(\theta)}{5+3\cos(\theta)}d\theta &= \left[-\frac{1}{3}\ln(5+3\cos(\theta))\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} \\
&= -\frac{1}{3}\ln(5-3/2)+\frac{1}{3}\ln(5+3) \\
&= \frac{-\ln(7)+\ln(2)+\ln(8)}{3} \\
&= \frac{4\ln(2)-\ln(7)}{3}.
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\sum_{\substack{n\geqslant 0\\ 3 \text{ ne divise pas } n}}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n} = \frac{4\ln(2)-\ln(7)}{3}.$$

**Exercice 12.** *Mines-Ponts 2023*. À l'aide d'une série entière bien choisie, calculer $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$.

**Correction**

On note $a_k = (-1)^k\binom{2k}{k}$ et $b_k = \binom{2k}{k}$. Alors on remarque que, si l'on suppose que $\sum a_k x^k$ et $\sum b_k x^k$ sont de rayons de convergence non nuls,

$$\left(\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k\right)\left(\sum_{k\geqslant 0} b_k x^k\right) = \sum_{n\geqslant 0} w_n x^n.$$

**Brouillon.** On reconnaît ici des choses qui ressemblent au développement en série entière de

$\sqrt{1+x}$. Recalculons-le. Par le cours, pour $|x|<1$,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}x^n.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} &= \frac{1}{n!}\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{-(2k-1)}{2}\\
&= \frac{1}{n!}\frac{1}{2}(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k-1}{2}\\
&= \frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)\\
&= \frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}(-1)^{n-1}\prod_{k=0}^{n-2}(2k+1)\\
&= \frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}(-1)^{n-1}\times 1\times 3\times\cdots\times(2n-3)\\
&= \frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2\times 4\times\cdots\times(2n-2)}\\
&= \frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}
\end{aligned}$$

Au brouillon, on voit que ce n'est pas fou. Il va y avoir un coefficient binomial $\binom{2n-2}{n-1}$ **mais** il va rester un $\frac{1}{n}$ qui traîne... Cela voudrait dire que $\sqrt{1+x}$ est, à plein de coefficients près, comme une primitive de la série entière qui nous intéresse ! Développons alors en série entière $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ voire, même, pour éviter des puissances négatives, $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.
**Fin du brouillon.**

On écrit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}(-x)^n \\
&= 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)x^n \\
&= 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{2}\right)x^n \\
&= 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\right)\frac{1}{2^n}x^n \\
&= 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!}\frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}2k}\frac{1}{2^n}x^n \\
&= 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!}\frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{2^n}x^n \\
&= 1 + \sum_{n\geqslant 1} \binom{2n}{n}\left(\frac{x}{4}\right)^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n}\left(\frac{x}{4}\right)^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} b_n\left(\frac{x}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}.$$

Ces deux séries entières ont un rayon de convergence supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$. On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n\right) &= \frac{1}{\sqrt{1+4x}}\frac{1}{\sqrt{1-4x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}} &= \sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n}\left(\frac{(4x)^2}{4}\right)^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} 4^n x^{2n}.
\end{aligned}$$

On en déduit, par unicité du développement en série entière, que

$$w_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ \binom{2p}{p} 4^p \text{ si } n \text{ est pair, } n = 2p. \end{cases}$$

**Exercice 13.** *Centrale 23*. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(n^2 x\right) e^{-n}$.

1. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Exprimer, pour $p \in \mathbb{N}$, $f^{(4p)}(0)$ sous forme de somme.

**Correction**

On note, pour $n$ dans $\mathbb{N}$, $f_n(x) = \cos(n^2 x)e^{-n}$. Alors $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour $n$ fixé et $k \in \mathbb{N}$,

$$f_n^{(k)} : x \mapsto n^{2k} \cos\left(n^2 x + k\frac{\pi}{2}\right) e^{-n}.$$

En particulier, $f_n^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et

$$\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty = n^{2k} e^{-n},$$

terme général d'une série convergente. Donc pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement, donc $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
En particulier,

$$\begin{aligned} f^{(4p)}(0) &= \sum_{n\geqslant 0} n^{8p} \cos\left(n^2 x + 2p\pi\right) e^{-n} \\ &= \sum_{n\geqslant 0} n^{8p} e^{-n}. \end{aligned}$$

2. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{8p} t^{8p} e^{-t}\, dt \leqslant \sum_{n=0}^{8p} n^{8p} e^{-n}$ et $\int_{8p}^{+\infty} t^{8p} e^{-t}\, dt \leqslant \sum_{n=8p}^{+\infty} n^{8p} e^{-n}$.

**Correction**

Soit $p$ dans $\mathbb{N}^*$. On étudie la fonction $\varphi : t \mapsto t^{8p} e^{-t}$. Alors $\varphi$ est dérivable et

$$\varphi' : t \mapsto t^{8p-1} e^{-t}(8p - t),$$

donc $\varphi$ est croissante sur $[0, 8p]$ et décroissante sur $[8p, +\infty[$.

- Par croissance de $\varphi$ sur $[0, 8p]$, pour $n$ dans $[\![1, 8p]\!]$,

  $$\forall t \in [\![n-1, n]\!], \varphi(t) \leqslant \varphi(n),$$

  donc

  $$\int_{n-1}^{n} t^{8p} e^{-t} dt \leqslant \varphi(n) = n^{8p} e^{-n},$$

  donc, en sommant pour $n$ allant de 1 à $8p$,

  $$\int_0^{8p} t^{8p} e^{-t} dt \leqslant \sum_{n=1}^{8p} n^{8p} e^{-n} = \sum_{n=0}^{8p} n^{8p} e^{-n}.$$

  D'où la première inégalité.
- Par décroissance de $\varphi$ sur $[8p, +\infty[$, pour $n \geqslant 8p$, on a

  $$\forall t \in [\![n, n+1]\!],\ \varphi(t) \leqslant \varphi(n),$$

  donc

  $$\int_n^{n+1} t^{8p} e^{-t} dt \leqslant \varphi(n) = n^{8p} e^{-n},$$

donc, en sommant pour $n$ allant de $8p$ à $+\infty$,

$$\int_{8p}^{+\infty} t^{8p} \mathrm{e}^{t} dt \leqslant \sum_{n=8p}^{+\infty} n^{8p} \mathrm{e}^{-n}$$

**3.** Montrer que, pour tout $r > 0$, la série de terme général $\dfrac{f^{(4p)(0)}}{(4p)!} r^{4p}$ est divergente. En déduire que $f$ n'est pas développable en série entière.

**Correction**

Soit $r > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(4p)(0)}}{(4p)!} r^{4p} &= \frac{r^{4p}}{(4p)!} \sum_{n \geqslant 0} n^{8p} \mathrm{e}^{-n} \\
&= \frac{r^{4p}}{(4p)!} \left( \sum_{n=0}^{8p} n^{8p} \mathrm{e}^{-n} + \sum_{n=8p}^{+\infty} n^{8p} \mathrm{e}^{-n} - (8p)^{8p} \mathrm{e}^{-8p} \right) \\
&\geqslant \frac{r^{4p}}{(4p)!} \left( \int_0^{+\infty} t^{8p} \mathrm{e}^{-t} dt - (8p)^{8p} \mathrm{e}^{-8p} \right) \\
&\geqslant \frac{r^{4p}}{(4p)!} \left( \Gamma(8p+1) - (8p)^{8p} \mathrm{e}^{-8p} \right) \\
&\geqslant \frac{r^{4p}}{(4p)!} \left( (8p)! - (8p)^{8p} \mathrm{e}^{-8p} \right) \text{ par le chapitre 9 d'intégrales à paramètre} \\
&\underset{p \to +\infty}{\sim} r^{4p} \frac{(8p)!}{(4p)!}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{(8p)!}{(4p)!} = \frac{(4p)! \times (4p+1) \times \cdots \times (8p)}{(4p)!} \geqslant (4p)^{4p},$$

donc

$$\frac{f^{(4p)(0)}}{(4p)!} r^{4p} \geqslant (4r)^{4p} p^{4p} = \mathrm{e}^{4p(\ln(4r) + \ln(p)))} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc la série de terme général $\dfrac{f^{(4p)(0)}}{(4p)!} r^{4p}$ diverge grossièrement donc diverge.

Or, si $f$ était développable en série entière, elle possèderait un rayon de convergence non nul $R > 0$. À l'intérieur de l'intervalle de convergence, elle serait égale à sa série de Taylor $\sum \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Donc, à l'intérieur de l'intervalle de convergence, la série de Taylor de $f$ convergerait absolument.

Or, si l'on prend $x \in ]-R, R[$, si l'on pose $b_k = \dfrac{f^{(4p)(0)}}{(4p)!} x^{4p}$ si $k = 4p$ et $b_k = 0$ sinon, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \geqslant b_k,$$

terme général d'une série divergente. Donc la série de Taylor de $f$ ne converge pas absolument, ce qui est absurde, donc $f$ n'est pas développable en série entière.

**Exercice 14.** *Mines-Ponts 24*. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} x^{2n}$.

**1.** Trouver l'ensemble de définition de $f$.

**Correction**

$f$ est une série entière, on détermine son rayon de convergence. Soit $x \neq 0$. Alors

$$\left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} x^{2n+2}}{\frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} x^{2n}} \right| = \frac{x^2}{4(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $f$ est définie sur tout $\mathbb{R}$.

**2.** Trouver une équation différentielle vérifiée par $f$.

**Correction**

Déjà, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} 2n x^{2n-1}.$$

Ensuite, on remarque que si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} 2n(2n-1) x^{2n-2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} (2n)^2 x^{2n-2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} 2n x^{2n-2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2^{n-1}(n-1)!)^2} x^{2(n-1)} - \frac{1}{x} f'(x) \\ &= -f(x) - \frac{1}{x} f'(x). \end{aligned}$$

Donc

$$x f''(x) + f'(x) + x f(x) = 0.$$

**3.** Calculer $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt}\, dt$ pour $x \in ]1, +\infty[$.

**Correction**

*Remarque : j'étais parti pour faire cette question en utilisant la question précédente, je n'y suis pas parvenu !* Soit $x > 1$. On cherche à calculer

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} t^{2n} \mathrm{e}^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n\geqslant 0} f_n(t) dt,$$

où $f_n : t \mapsto \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} t^{2n} \mathrm{e}^{-xt}$. Faisons déjà un calcul préparatoire, celui de

$$\mathrm{I}_k = \int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-xt} dt.$$

On fait une IPP en dérivant $t^k$ et en intégrant $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ en $t \mapsto -\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-xt}$. On obtient, par IPP,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_k &= \left[-\frac{1}{x}t^k\mathrm{e}^{-xt}\right]_0^{+\infty} + \frac{k}{x}\int_0^{+\infty} t^{k-1}\mathrm{e}^{-xt}dt \\
&= \frac{k}{x}\mathrm{I}_{k-1} \\
&= \dots \\
&= \frac{k!}{x^k}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}dt \\
&= \frac{k!}{x^{k+1}}
\end{aligned}$$

On peut désormais appliquer un théorème d'intégration terme à terme. On calcule

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt &= \int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt \\
&= \frac{1}{(2^n n!)^2}\int_0^{+|infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-xt}dt \\
&= \frac{1}{(2^n n!)^2}\frac{(2n)!}{x^{2n+1}} \\
&= \frac{1}{4^n}\frac{(2n)!}{n!^2}\frac{1}{x^{2n+1}}.
\end{aligned}$$

Pour savoir si ce terme est le terme général d'une série convergente, utilisons une règle de D'Alembert. On calcule

$$\frac{\frac{1}{4^{n+1}}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}\frac{1}{x^{2n+3}}}{\frac{1}{4^n}\frac{(2n)!}{n!^2}\frac{1}{x^{2n+1}}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2 4x^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x^2} < 1,$$

car on a supposé $x > 1$. On en déduit donc que la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n|$ converge. Comme la série de fonctions continues $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue, on en déduit, par le théorème d'intégration terme à terme, que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\sum_{n\geqslant 0} f_n(t)dt &= \sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt \\
&= \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-xt}dt \\
&= \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}\frac{(2n)!}{x^{2n+1}} \\
&= x\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{x^{2n}} \\
&= x\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}$$

*Pour trouver la dernière formule, il faut se dire que cela ressemble à des DSE qu'on a vu avec de la racine, repenser au cours que l'on a fait pour arcsin et adapter.*

**Exercice 15.** *Centrale 24*. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$, on note $v_n = -\alpha \ln(n) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\alpha}{k}\right)$ et $a_n = \dfrac{n!}{\prod_{i=1}^{n}(\alpha + i)}$.

**1.** Déterminer le rayon de convergence $R$ de $\sum a_n z^n$.

**Correction**

Comme $a_n$ est non nul pour tout $n$, on va utiliser une règle de D'Alembert.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{\prod_{i=1}^{n+1}(\alpha+i)} \times \frac{\prod_{i=1}^{n}(\alpha+i)}{n!} = \frac{n+1}{\alpha+n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est égal à 1.

**2.** Montrer que $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.

**Correction**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= -\alpha(\ln(n+1) - \ln(n)) + \ln\left(1 + \frac{\alpha}{n+1}\right) \\
&= -\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{\alpha}{n+1}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha}{2n^2} + \frac{\alpha}{n+1} - \frac{\alpha}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\alpha}{n(n+1)} + \frac{\alpha}{2n^2} - \frac{\alpha}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

donc, par comparaison à une série de Riemann, la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.

**3.** En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.

**Correction**

On en déduit, par le lien suite-série, que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell$. On peut alors dire que

$$-\alpha \ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Or,

$$\begin{aligned}
-\alpha \ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) &= \ln\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) + \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+\alpha}{k}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) + \ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+\alpha)}{n!}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{n^\alpha a_n}\right)
\end{aligned}$$

que
$$\ln\left(\frac{1}{n^\alpha a_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell,$$
donc que $n^\alpha a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\ell} = \lambda$, d'où le résultat désiré.

**4.** Étudier la convergence de $\sum a_n z^n$ pour $|z| = R$.

*Indication. Pour $\alpha \leqslant 1$, on pourra noter $B_N = \sum_{n=0}^{N} z^n$ et exprimer $\sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ à l'aide de $B_n$ et de $a_n - a_{n+1}$.*

**Correction**

Déjà, si $\alpha > 1$, alors, pour $|z| = 1$, $|a_n z^n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$, terme général d'une série convergente.
Ensuite, si $\alpha \leqslant 1$,

- ou bien $z = 1$ et alors, par l'équivalent $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$, on en déduit que $\sum a_n$ diverge.
- ou bien $z \neq 1$. On note alors $B_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$. Or, $z^n = B_n - B_{n-1}$, donc on peut écrire, pour $N \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n z^n &= a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n (B_n - B_{n-1}) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n B_n - \sum_{n=1}^{N} a_n B_{n-1} \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n B_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} B_n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n + a_N B_N - a_1 B_0 \\
&= a_0 - a_1 + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n + a_N B_N.
\end{aligned}$$
*Remarque : on vient de faire une transformation d'Abel.*
Or,
$$\begin{aligned}
a_n - a_{n+1} &= \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} (\alpha + i)} - \frac{(n+1)!}{\prod_{i=1}^{n+1} (\alpha + i)} \\
&= \frac{n!(\alpha + n + 1) - (n+1)!}{\prod_{i=1}^{n+1} (\alpha + i)} \\
&= \frac{n!\alpha}{\prod_{i=1}^{n+1} (\alpha + i)} \\
&= a_n \frac{\alpha}{\alpha + n + 1} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda\alpha}{n^{\alpha+1}}
\end{aligned}$$
Donc $\sum a_n - a_{n+1}$ converge (absolument). En conclusion, **comme** $(B_n)_{N\in\mathbb{N}}$ **est bornée** par $\frac{2}{|1-z|}$,

 nlaillet.math@gmail.com

— déjà, $|(a_n - a_{n+1})B_n| \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$, terme général d'une série convergente, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1}(a_n - a_{n+1})B_n$ tend vers une limite finie quand $N$ tend vers $+\infty$,

— comme $a_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $B_N$ est bornée, $a_N B_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

donc, finalement, la série de terme général $a_n z^n$ converge.

**Exercice 16.** *Centrale python 22*. On pose $g(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$, $P_0 = 1$, $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$ et $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\mathrm{d}t$.

**1.** Montrer que $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

**Correction**

On sait que pour tout $x$ dans $]-1,1[$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$. Donc, pour $x$ non nul,

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n,$$

qui est une série entière, de rayon de convergence 1, donc prolongeable par continuité en 0 et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

**2.** En déduire que $g$ admet un développement limité en 0 à tout ordre.

**Correction**

La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et ne s'annule pas au voisinage de 0, donc $x \mapsto \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0. Ceci assure, par la formule de Taylor-Young, que $g$ admet un développement limité en 0 à tout ordre.

**3.** **[Py]** En effectuant des calculs sur les polynômes avec Python, calculer les 10 premiers coefficients du développement limité de $g(x)$ en 0.

**Correction**

On sait que

$$\frac{x}{\ln(1+x)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{9}\frac{(-1)^k}{k+1}x^k + o(x^9)} = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{9}\frac{(-1)^{k-1}}{k+1}x^k + o(x^9)}.$$

Donc si l'on pose $P(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{9}\frac{(-1)^{k-1}}{k+1}x^k$, on sait que

$$\frac{x}{\ln(1+x)} = 1 + \sum_{k=1}^{9}P(x)^k + o(x^9)$$

On calcule alors

```python
from numpy.polynomial import Polynomial

X = Polynomial([0,1])

P = 0
for k in range(1,10):
    P+=(-1)**(k-1)/(k+1)*X**k

dl = Polynomial([1])
for k in range(1,10):
    dl += P**k

DL = dl.coef[0:10]
```

On trouve alors

```python
>>> DL
array([1.,0.5,-0.08333333,0.04166667,-0.02638889,
0.01875,-0.01426918,0.01136739,-0.00935654,0.00789255])
```

**4.** **[Py]** Comparer avec les 10 premières valeurs de $\mathrm{I}_n$. Que peut-on conjecturer ?

**Correction**

On propose

```python
import scipy.integrate as integr

def Q(k):
    res = Polynomial([1])
    for i in range(k):
        res*=(X-i)
    return res

def facto(n):
    res = 1
    for k in range(1,n+1):
        res*=k
    return res

def I(n):
    return integr.quad(Q(n),0,1)[0]/facto(n)

L = [I(n) for n in range(10)]
```

et on trouve

```python
>>> L
[1.0, 0.5, -0.08333333333333334, 0.041666666666666664,
-0.02638888888888889, 0.01875, -0.01426917989417989,
0.011367394179894179, -0.009356536596119932, 0.007892554012345681]
```

Il s'agit de la liste des coefficients du DL !

**5.** Trouver un encadrement judicieux de $\mathrm{I}_n$ afin de déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\mathrm{I}_n x^n$.

**Correction**

On sait déjà que, pour $t$ dans $[0,1]$, $|t-k| \leqslant k+1$ donc $|\mathrm{I}_n| \leqslant \frac{1}{n!}n! = 1$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathrm{I}_n t^n$ est supérieur ou égal au rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} t^n$, c'est-à-dire 1.

Ensuite, on remarque que $\mathrm{I}_n$ est du signe de $(-1)^n$ donc

$$|\mathrm{I}_n| = \frac{1}{n!}\int_0^1 t\prod_{k=1}^{n-1}(k-t)dx.$$

Pour $k \geqslant 2$, on peut dire que, sur $[0,1]$, $k-t \geqslant k-1$, donc

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}_n| &\geqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 t(1-t)\prod_{k=2}^{n-1}(k-1)dt\\ &\geqslant \frac{1}{(n-1)n}\int_0^1 t-t^2dx = \frac{1}{6(n-1)n}.\end{aligned}$$

Donc le rayon de convergence de $\sum \mathrm{I}_n x^n$ est supérieur ou égal au rayon de convergence de $\sum \frac{1}{6(n-1)n}x^n$, c'est-à-dire 1.

**6.** Comparer $\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{I}_n x^n$ et $\int_0^1 (1+x)^t \, \mathrm{d}t$ ; en déduire une preuve de la conjecture formulée en 4.

**Correction**

On calcule de deux manières $\int_0^1 (1+x)^t dt$ :

- méthode directe :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1+x)^t \, \mathrm{d}t &= \int_0^1 \mathrm{e}^{t\ln(1+x)}dt\\ &= \frac{1}{\ln(1+x)}[\mathrm{e}^{t\ln(1+x)}]_0^1\\ &= \frac{1}{\ln(1+x)}(1+x-1) = g(x).\end{aligned}$$

- méthode par séries entières : on sait que pour $x \in ]-1,1[$,

$$\begin{aligned}(1+x)^t &= 1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(t-k)x^n\\ &= \sum_{n\geqslant 0}\frac{P_n(t)}{n!}x^n\end{aligned}$$

  Ainsi, si $x \in ]-1,1[$,

$$\int_0^1 (1+x)^t dt = \int_0^1 \sum_{n\geqslant 0}\frac{P_n(t)}{n!}x^n dt.$$

On note $f_n(t) = \dfrac{P_n(t)}{n!}x^n$. Alors par une majoration faite précédemment,

$$\int_0^1 |f_n(t)|dt = x^n \frac{1}{n!}|\mathrm{I}_n| \leqslant x_n,$$

terme général d'une série convergente (car $x \in ]-1,1[$). Comme les $f_n$ sont toutes continues et que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement, le théorème d'intégration terme à terme permet de conclure que

$$g(x) = \int_0^1 (1+x)^t dt = \sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 \frac{P_n(t)}{n!}x^n dt = \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{I}_n x^n,$$

d'où l'égalité et, par conséquent, l'égalité des développements limités !

**Exercice 17.** *Centrale 2024*. **1.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière qui converge sur $]-\alpha,\alpha[$, avec $\alpha > 0$. Montrer que sa somme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\alpha,\alpha[$.

**Correction**

C'est du cours.

**2.** Est-ce que toute fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un ouvert contenant 0 est développable en série entière au voisinage de 0 ?

**Correction**

Non ! On a vu un exemple du cours, avec la fonction nulle sur $\mathbb{R}_-$ et égale à $e^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}_+$, dont toutes les dérivées sont nulles en 0.

**3.** Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un ouvert contenant 0 . Montrer qu'elle est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement si :

$$\exists(\alpha, M, A) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\alpha,\alpha], \left|f^{(p)}(x)\right| \leqslant MA^p p!$$

*Remarque : c'est une question posée à l'écrit de l'X, en MP, en 2021... Je donne donc les indications suivantes :*

- *pour le sens réciproque (le plus simple), utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.*
- *pour le sens direct montrer que si $f$ est DSE sur $]-R,R[$, alors pour tout $r \in ]0,R[$, $\left(\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Utiliser cette borne et penser à reconnaître une dérivée p-ième de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.*

**Correction**

Procédons par double implication.
**Sens direct.** Si $f$ est développable en série entière au voisinage de 0, alors on dispose de $R > 0$ tel que pour sur $]-R,R[$, $f$ est égale à sa série de Taylor :

$$\forall x \in ]-R,R[,\ f(x) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Mais alors, si $0 < r < R$, on sait que la suite $\left(\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 donc est bornée, par, disons, $M > 0$ (ça ne sera peut-être pas le même $M$ que celui qui est demandé). On écrit alors que, si $p \in \mathbb{N}$, et $x \in [-r, r]$,

$$\begin{aligned}
|f^{(p)}(x)| &= \left|\sum_{k\geqslant p} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-p)!}x^{k-p}\right| \\
&\leqslant \sum_{k\geqslant p} \left|\frac{f^{(k)}(0)}{(k-p)!}x^{k-p}\right| \\
&\leqslant M\sum_{k\geqslant p} \left|\frac{k!}{r^k(k-p)!}x^{k-p}\right| \\
&\leqslant \frac{M}{r^p}\sum_{k\geqslant p} \frac{k!}{(k-p)!}\left(\frac{|x|}{r}\right)^{k-p}.
\end{aligned}$$

On reconnaît alors le développement en série entière de la dérivée $p$-ième de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ évaluée en $\dfrac{|x|}{r}$. Or, la dérivée $p$-ième de cette fonction est $x \mapsto \dfrac{p!}{(1-x)^p}$. Donc

$$\begin{aligned}
|f^{(p)}(x)| &\leqslant \frac{M}{r^p}\frac{p!}{\left(1-\frac{|x|}{r}\right)^{p+1}} \\
&\leqslant Mp!r\frac{1}{(r-|x|)^{p+1}}
\end{aligned}$$

Donc si on prend $\alpha \in ]0, r[$, alors pour tout $x$ dans $[-\alpha, \alpha]$, pour tout $p$ dans $\mathbb{N}$,

$$|f^{(p)}(x)| \leqslant (Mr) \times p! \times \left(\frac{1}{r-\alpha}\right)^{p+1},$$

d'où le résultat avec $M' = Mr$ et $A = \dfrac{1}{r-\alpha}$.

**Sens réciproque.** Supposons que l'on dispose de $(\alpha, M, A) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$ tels que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\alpha, \alpha], \left|f^{(p)}(x)\right| \leqslant MA^p p!$$

Soit $x \in [-\alpha, \alpha]$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors par l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| &\leqslant \max_{t\in[0,x]} ||f^{(p+1)}(t)|\frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!} \\
&\leqslant MA^p p!\frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!} = M|x|\frac{(A|x|)^p}{p+1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

dès lors que $x \in ]-r, r[$ où $r = \min\left(\alpha, \dfrac{1}{A}\right)$. Ainsi, pour tout $x$ dans $]-r, r[$, $f$ est égale à la somme de sa série de Taylor donc est développable en série entière.