Exo 1 :

1) Posons $f_n : t \longmapsto e^{-\frac{1}{t}} t^n$

f_n est continue sur $]0,1]$

En 0 : $-\frac{1}{t} \xrightarrow[t \to 0^+]{} -\infty$ Donc $f_n(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$

f_n est prolongeable par continuité donc intégrable sur le segment $[0,1]$

$I_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

2) Soit $N \in \mathbb{N}$.

$\forall t \in [0,1]$, $t^N \geq t^{N+1}$

$\forall t \in [0,1]$, $e^{-\frac{1}{t}} t^N \geq e^{-1/t} t^{N+1}$

Par croissance de l'intégrale $I_n \geq I_{n+1}$

Donc $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

3) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur $[0,1]$

. Soit $t \in]0,1]$, $f_n(t) = e^{-1/t} t^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]0,1[\\ e^{-1} \text{ si } t = 1 \end{cases}$
$= f(t)$

. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]0,1]$,
$t^n \leq 1$

Donc $\forall t \in]0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n(t)| \leq e^{-\frac{1}{t}}$
intégrable sur $[0,1]$ et indép de n.

Donc par thm de conv dominée, I_n converge et $\int_0^1 e^{-1/t} t^n \, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\, dt = 0$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Posons $u : t \mapsto \frac{1}{n+1} t^{n+1}$

$u' : t \mapsto t^n$

$v : t \mapsto e^{-1/t}$ $\quad v' : t \mapsto$

Par IPP, $I_n = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} e^{-1/t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n+1} t^{n+1} \frac{1}{t^2} e^{-1/t} dt$

$= \frac{e^{-1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n-1} e^{-1/t}$

$I_n(n+1) + I_{n-1} = e^{-1}$

5) $I_n = \dfrac{e^{-1} - I_{n-1}}{n+1}$

Or $e^{-1} - I_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$

D'où $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{n}$

6) Par comparaison de SATP

La stg In diverge

7) In est positive, ↘ et tend vers 0

Donc par crit. des séries alt.

$\sum (-1)^{n-1} I_n$ cvg.

Exo 14 :

Posons $f(x,t) = \cos(2xt) e^{-t^2}$

$\forall t \in [0,+\infty[$, $x \longmapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $t \longmapsto f(x,t)$ est continue

On a $t^2 \cos(2xt) e^{-t^2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

Donc $\cos(2xt) e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Donc intégrable en $+\infty$

Alors $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

$\forall x \in \mathbb{R}$. $t \longmapsto \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = -2e^{-t^2} t \sin(2xt)$

et continue sur $[0,+\infty[$.

$\forall t \in [0,+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\left| \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right| \leq 2te^{-t^2}$$ indép de x, intég. sur $\mathbb{R}_+$ ($2te^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2) Par 1) $F'(x) = \int_0^{+\infty} -2te^{-t^2} \sin(2xt)\,dt$

Par IPP en posant

$u'(t) = -2e^{-t^2}$ $\quad v(t) = \sin(2xt)$

$u(t) = e^{-t^2}$ $\quad v'(t) = 2x\cos(2xt)$

⚠ À l'écrit, on vérif la CV du crochet !

On obtient $F'(x) = \left[\sin(2xt)e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t^2} 2x\cos(2xt)\,dt$

Donc $F'(x) = -2xF(x)$

$F'(x) + 2xF(x) = 0$

Donc on disp de $A \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = Ae^{-x^2}$

$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Donc $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$

Exo 7 :

2) Soit $t \in]0, +\infty[$.

$$\frac{\sin(t)}{sh(t)} = \frac{2\sin(t)}{e^t - e^{-t}} = 2\sin(t)e^{-t} \times \frac{1}{1-e^{-2t}}$$

$$= 2\sin(t)e^{-t} \sum_{n \geq 0} (e^{-2t})^n$$

avec $e^{-2t} \in [0,1]$

$$= \sum_{n \geq 0} u_n(t) \quad \text{où} \quad u_n(t) = 2\sin(t)e^{-t}(e^{-2t})^n$$

3) On note $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(t) = \sum_{k=0}^{n} 2\sin(t)e^{-t}(e^{-2t})^k$

- $\forall n \in \mathbb{N}$, S_n est continue sur $[0, +\infty[$
- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS vers $S(t) = \frac{\sin(t)}{sh(t)}$
- domination : Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in]0, +\infty[$.

$$|S_n(t)| = \left| 2\sin(t)e^{-t} \times \frac{1 - (e^{-2t})^{n+1}}{1 - e^{-2t}} \right|$$

Ex. 7 (suite)

3) (suite)

$$\leq \left| \frac{2\sin(t)}{e^t - e^{-t}} \right| \times 1 \quad \leq \left| \frac{\sin(t)}{sh(t)} \right|$$, indép de n, intégrable par la q°1.

Donc par th. de cv dominée

$$\int_0^{+\infty} S_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{sh(t)}\,dt$$

Or $\int_0^{+\infty} u_k(t)\,dt = \frac{2}{(2k+1)^2+1}$

Donc $\int_0^{+\infty} S_n(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(2k+1)^2+1}$

Donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)^2+1} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{sh(t)}\,dt$

D'où le résultat.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in [n, n+1]$, par comp série-intég., on a :

$$\frac{1}{1+((n+1)2+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{1+(2t+1)^2} \leq \frac{1}{1+(2n+1)^2}$$

Donc en sommant de 0 à $+\infty$, on a :

1er terme de I

$$\frac{I-1}{2} \leq \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+(2t+1)^2}}_{=\frac{\pi}{8}} \leq \frac{I}{2}$$

Donc $I - 1 \leq \frac{\pi}{4} \leq I$

Donc $\frac{\pi}{4} \leq I \leq 1 + \frac{\pi}{4}$

Exo 8

1) Soit $x \geq 0$, on a :

$$t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt} \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t^2} e^{-xt} \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{1}{2}$$

<u>en $+\infty$</u> : soit $t > 0$, on a :

$$\left| \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt} \right| \leq \frac{2}{t^2}$$

Or $\frac{2}{t^2}$ est intégrable
donc $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}$ est intégrable aussi en $+\infty$.

. $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-t^2 x}$ est continue sur $[0,+\infty[$

Donc f bien déf sur $\mathbb{R}_+$

2) On pose $g(x,t) : t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-t^2 x}$
Soit $(t,x) \in (\mathbb{R}_+)^2$
On a :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- $|g(x,t)| \leq \begin{cases} 1/2 & \text{si } t \leq 1 \\ 2/t^2 & \text{si } t > 1 \end{cases}$,

$$\frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1-\cos(2t/2)}{t^2} = \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}$$

$$\leq \frac{2t^2/4}{t^2} = \frac{1}{2}$$

Donc par th. de continuité des intég. à paramètres f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Donc par th. de continuité des intégrales à paramètres,
f est continue sur $\mathbb{R}_+$

3) $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x,t)$ $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$

On a : $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable

soit $x \geq 0$,

. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{1-\cos(t)}{t} e^{-xt}$

① prolongeable par continuité en 0.

② en 0 : $\left| -\dfrac{1-\cos(t)}{t} e^{-xt} \right| \leq \dfrac{2e^{-xt}}{t}$, intég. en $+\infty$

Donc, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

. $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos(t)) e^{-xt}$, est continue sur $\mathbb{R}_+$.

soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \cancel{[0,a]} \to [a,+\infty[$

$|(1-\cos(t)) e^{-xt}| \leq 2e^{-xt} \leq 2e^{-at}$, int et indep de x.

Donc par thm de classe $\mathcal{C}^2$ des intégrales à paramètres

donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,+\infty[$

Partout $a>0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) On a : $g(x,t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}$

. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intég. sur $\mathbb{R}_+$

. $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

dominat° déjà faite q° 2.

Donc par thm de cv dominée des $\int$ à param

$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} 0 = 0$

Pour $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)-1}{t} e^{-xt} dt$

On résume :

. $\frac{\cos(t)-1}{t} e^{-xt} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

. domination soit $X > 1$ (on fait tendre $x \to +\infty$ Donc on prend x qcq)

$$\left| \frac{\cos(t)-1}{t} e^{-xt} \right| = \frac{|\cos(t)-1|}{t} e^{-xt}$$

$$= \frac{|2\sin^2(t/2)|}{t} e^{-xt}$$

$$\leq \frac{2t^2/4}{t} e^{-xt}$$

$$= \frac{t}{2} e^{-xt} \leq \frac{te^{-t}}{2}$$ int et indep de x

Donc $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} 0 = 0$

5) Soit $x>0$.

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos(t)) e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} - \int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-xt}$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-xt} - \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\right)$$

$$= \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_0^{+\infty}\right) = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(-\frac{1}{i-x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

Donc $f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + A$

Or $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, donc $A = 0$

Or : $\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Exo 8 (suite) :

5) (suite) :

Donc $A = 0$

D'où $f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$f(x) = x\ln(x) - x - \frac{1}{2}\int_0^x \ln(1+t^2) + D$

Calculons $\frac{1}{2}\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt$

On pose $u(t) = \ln(1+t^2)$ et $v' = \cancel{\frac{2t}{1+t^2}}\ 1$

$u'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$ $\qquad v(t) = t$

Donc $\frac{1}{2}\int_0^x \ln(1+t^2) = \frac{1}{2}\cdot[t\ln(1+t^2)]_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$

$= \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt$

$= \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) - \int_0^x \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt$

$= \frac{1}{2}\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt = \frac{x}{2}\ln(1+x^2) - x + \arctan(x)$

Donc $f(x) = x\ln(x) - x - \frac{x}{2}\ln(1+x^2) + x - \arctan(x) + D$

$= x\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \arctan(x) + D\right)$

$f(x) \longrightarrow 0$ OR $x\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \longrightarrow 0$

$\arctan(x) \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

Donc $f(x) = x\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}$ (*)

$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$$

On pose $u(t) = 1 - \cos(t)$ $\quad u'(t) = \sin(t)$

$v'(t) = \frac{1}{t^2}$ $\quad v(t) = -\frac{1}{t}$

Par IPP, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

Or $(*)$, on a $f(0) = \frac{\pi}{2}$, or $f(0) = I$

Donc $I = \frac{\pi}{2}$

Exo : Mq $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,dt$

Mq l'$\int$ existe

en 0 : $\sqrt{t}\,\frac{\ln(t)}{t-1} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

donc $\frac{\ln(t)}{t-1} \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ intégrable.

ou $\frac{\ln(t)}{t-1} \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$ intégrable en 0

COURS

en 1 : $\dfrac{\ln(t)}{t-1} \underset{t \to 1}{\sim} \dfrac{t-1}{t-1} = 1$.

~~[illegible]~~ Soit $t \in [0,1[$.

$\dfrac{\ln(t)}{t-1} = \dfrac{-\ln(t)}{1-t} = -\ln(t) \sum_{n \geq 0} t^n = \sum_{n \geq 0} f_n(t)$

où $f_n : t \longmapsto \ln(t)\, t^n$

Alors $\forall t \in [0,1[$, la série $\sum f_n(t)$ converge / (la série $\sum f_n$ CVS)

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $[0,1]$

(continue sur $]0,1]$, et en 0, $f_n(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ si $n > 0$

$f_0(t) = \ln(t)$, intégrable en 0.

$\int_0^1 |f_n(t)|\, dt = \int_0^1 f_n(t)\, dt = \int_0^1 \underbrace{-\ln(t)}_{\text{on dérive}}\, \underbrace{t^n}_{\text{on intègre}}\, dt$

$= \left[-\dfrac{\ln(t)\, t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 + \int_0^1 \dfrac{1}{t} \times \dfrac{t^{n+1}}{n+1}\, dt$

$= 0 + \dfrac{1}{n+1} \int_0^1 t^n\, dt = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, tg d'1 série CV.

Donc par le th. d'$\int$ terme à terme, $\int_0^1 \sum_{n \geq 0} f_n(t)\, dt = \sum_{n \geq 0} \int_0^1 f_n(t)\, dt$

Donc $\int_0^1 \dfrac{\ln(t)}{t-1}\, dt = \sum_{n \geq 0} \dfrac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^2} = \left(\dfrac{\pi^2}{6}\right)$