Exo 3 : 2. $u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \, dx$

Soit $f_n : t \longmapsto t^n e^{-t}$

f_n est continue sur le segment $[0,1]$

Donc u_n est défini

$\forall t \in [0,1] , 0 \leq f_n(t) \leq t^n$

Donc $0 \leq \int_0^1 f_n(t) \, dt \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc par encadrement, $\underline{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

3. $\forall x \in [0,1]$, $\frac{x^n}{e^1} < \frac{x^n}{e^x}$

en intégrant $\frac{1}{(n+1)e} \leq u_n$ Donc $\forall n \in \mathbb{N}$:

4. • $\frac{1}{(n+1)e} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$

or $\frac{1}{(n+1)e} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{ne}$ tg d'une série de Riemann divergente

Donc par comparaison des série à terme général positif divergent

$\underline{u_n \text{ Div}}$.

• $\frac{1}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ Riemann conv.

Donc par comparaison de série à terme positif

$\sum \frac{u_n}{n}$ Converge.

5. On conjecture $\underline{\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$

6. Posons $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \int_0^1 x^k e^{-x} \, dx$

Posons $f_k(x) = \frac{x^k e^{-x}}{k!}$. étudions f_k pour $k \geq 1$.

$f_k'(x) = \frac{x^{k-1} e^{-x}}{(k-1)!} - \frac{x^k e^{-x}}{k!}$

$= \frac{e^{-x}}{k!} x^{k-1} (k - x)$

	0		1
f_k'		+	
f_k	0	$\nearrow$	$\frac{e^{-1}}{k!}$

Donc $\|f_k\|_\infty^{[0,1]} = \frac{e^{-1}}{k!}$

C'est le terme général d'une série convergente.

On a convergence normale de la série de fct° sur $[0,1]$, donc uniforme sur $[0,1]$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^k e^{-x}}{k!} dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k e^{-x}}{k!} \right) dx$$

Donc $\underline{V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 (e^{-x} \times e^{x}) dx = 1}$

Ex 13 : 1. On pose $f(x,t) : \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$

- En $+\infty$: On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} \right| \leqslant \frac{\pi}{2t(1+t^2)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t^3}$ tg d'une intégrale convergente de Riemann.

- En 0 : On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} \underset{t\to0}{\sim} \frac{xt}{t(1+t^2)}$

$$= \frac{x}{1+t^2} \xrightarrow[t\to0]{} x$$

Donc $t \mapsto f(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0.
Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$
On en déduit que $\underline{D = \mathbb{R}}$

2. On a $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur D :
D'après la q° 1, $\forall x \in D$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $(x,t) \in D \times \mathbb{R}_+^*$.

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{t(1+t^2)} \times \frac{t}{1+x^2} = \frac{1}{(1+t^2)(1+(xt)^2)}$

Et $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ indep de x et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

De plus, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. $\forall x \in D$

Par théorème de dérivation des intégrales à paramètres,

F est $\mathcal{C}^1$ sur D.

Et $\forall x \in D$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+(xt)^2)}\,dt$

Indicat° : Soit $x \neq -1$ et $x \neq 1$ si $a \neq 0$

Trouver a et b dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+(xt)^2)} = \frac{a}{1+t^2} + \frac{b}{1+(xt)^2}$$

On a $\frac{a}{1+t^2} + \frac{b}{1+(xt)^2} = \frac{a(1+(xt)^2) + b(1+t^2)}{(1+t^2)(1+(xt)^2)}$

Alors $a(1+(xt)^2) + b(1+t^2) = 1$

ssi $a+b + t^2(ax^2+b) = 1$

On veut $\begin{cases} a+b=1 \\ ax^2+b=0 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} a+b=1 \\ a(x^2-1)+1=0 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} a+b=1 \\ a=\frac{-1}{x^2-1} \end{cases}$ Donc $\begin{cases} a = \frac{-1}{x^2-1} \\ b = \frac{x^2}{x^2-1} \end{cases}$

• $F'(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{-1}{x^2-1} \times \frac{1}{1+t^2} + \frac{x^2}{x^2-1} \times \frac{1}{1+(xt)^2} \right) dt$

$$= \frac{-1}{x^2-1} \left[\arctan t\right]_0^{+\infty} + \frac{x^2}{x^2-1} \left[\frac{1}{x}\arctan(xt)\right]_0^{+\infty}$$

Si $x>0$: On a $F'(x) = \frac{\pi}{2(x^2-1)} \times (x-1) = \frac{\pi}{2(x+1)}$

De plus, F impaire donc F' est paire

Alors, si $x<0$, $F'(x) = F'(-x) = \frac{\pi}{2(1-x)}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$, $F'(x) = \frac{\pi}{2(|x|+1)}$

Par continuité de F', cette formule est valable en -1, 0 et 1.

Si $x>0$: On a $F'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$

D'où $F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x) + C$, $C \in \mathbb{R}$

Par continuité de F, $F(x) \longrightarrow F(0) = 0$

Donc $\underline{F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)}$

Si $x<0$: On a $\underline{F(x) = -F(-x) = -\frac{\pi}{2}\ln(1-x)}$