Ex2 : $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt$

1. Soit $f : x \longmapsto \ln(1+t^n)$
cont sur $[0,1]$
Donc I_n est bien définie.

2. $\ln(1+t^n) \longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } t<1 \\ \ln(2) & \text{si } t=1 \end{array}\right\} f$

Donc $(f_n)_n$ CVS vers f. cpm sur $[0,1]$.
Domination : $\forall t \in [0,1] \quad \ln(1+t^n) \leq \ln(2)$
$\forall n \in \mathbb{N}$ intégrable sur $[0,1]$
Par le théorème de convergence dominée
$$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f = 0$$

3. Changement de variable : $t^n = u$ changement C^1 bijectif sur $[0,1]$.
$dt = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1}\,du$

$$I_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{n} u^{\frac{1-n}{n}}\,du$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u^{\frac{n-1}{n}}}\,du$$

$$n I_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u \times u^{-\frac{1}{n}}}\,du$$

Soit $g_n : u \longmapsto \frac{\ln(1+u)}{u \times u^{-\frac{1}{n}}}$ continue sur $]0,1]$.
$\forall u \in [0,1] \quad g_n(u) \longmapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$
Domination : $|g_n(u)| \leq \frac{\ln(1+u)}{u} \times u^{1/n}$
≤ 1

Par théorème de convergence dominée, $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u \times u^{-1/n}}\,du \longrightarrow \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du$
Donc $n I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du$
D'où $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du$

Rq: Pas besoin de vérifier la convergence de l'intégrande assuré par le théorème de convergence dominé

Créé avec Scanner Pro

4. $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{k-1}}{k} \, dt$ par l'indication

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n(t) = \frac{(-1)^{n+1} t^{n-1}}{n}$ $= a_n(t)$

Alors $\forall t$ $\sum u_n(t) = \sum (-1)^{n+1} a_n(t)$ où $(a_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissant et tend vers 0.

D'après le critère des séries alternées, $\sum u_n$ CVS

De plus $\forall t$ $\forall n$ $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{k-1}}{k} \right| \leq \left| \frac{t^n}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ indep de t

Donc $\sum u_n$ CVU

Alors $\int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{k-1}}{k} \, dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^{k+1} t^{k-1}}{k}$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} =: T$$

$S - T$

Or $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$

$$= \sum_{k\geq 1} \frac{1-(-1)^{k+1}}{k^2}$$

$$= \sum_{\substack{k\geq 1 \\ k \text{ pair}}} \frac{2}{k^2} = \sum_{p\geq 1} \frac{1}{(2p)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^2}$$

Donc $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$

$$= \frac{\pi^2}{12}$$

Ex 12 : $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt} \, dt$

1. Pour $x < 0$, $\frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc l'intégrale ne conv pas.

Pour $x = 0$, $\frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} \underset{t\to+\infty}{\sim} t$ pas intégrable en $+\infty$

Créé avec Scanner Pro

Pour $x > 0$, $\frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt} \underset{t \to +\infty}{\sim} t e^{-xt} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ intégrable en $+\infty$.

2. On note $\forall t \in [0, +\infty[, \forall x > 0$, $f(x,t) = \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt}$

- $\forall t \in [0, +\infty[$, $x \longmapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

  et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-t^4}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt}$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \longmapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}_{pm}$ et intégrable sur $[0, +\infty[$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est $\mathcal{C}_{pm}$ sur $[0, +\infty[$
- Soit $a > 0$, $\forall x \in [a, +\infty[$,

  $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t^4}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt} \leqslant \frac{t^4}{\sqrt{1+t^4}} e^{-at}$ intégrable et indep de x.

Donc d'après le théorème de la classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre, F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ $\forall a > 0$

donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$

et $\forall x > 0$ $F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^4}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt} \, dt < 0$

donc F est décroissante.

Créé avec Scanner Pro