Chapitre 11
Équations différentielles – Résumé de cours

1 Rappels et grands théorèmes

Proposition 1 (Rappel de sup)

On considère l'équation différentielle $y' + a(t)y = c(t)$, définie sur l'**intervalle** I.

1. si c est la fonction nulle, l'ensemble des solutions est une droite vectorielle,
2. si c est quelconque et f_0 est une solution particulière de l'équation, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est
$$\{f + f_0,\ f \text{ est solution de l'équation homogène}\}$$
3. si $t_0 \in \mathrm{I}$, si α est un complexe, le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' + a(t)y = c(t) \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}$$
admet une unique solution.

Proposition 2

On considère l'équation différentielle $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$, définie sur l'**intervalle** I.

1. si c est la fonction nulle, l'ensemble des solutions est un plan vectoriel,
2. si c est quelconque et f_0 est une solution particulière de l'équation, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est
$$\{f + f_0,\ f \text{ est solution de l'équation homogène}\}$$
3. si $t_0 \in \mathrm{I}$, si α et β sont deux complexes, le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$$
admet une unique solution.

2 Méthodes de résolution d'une équation différentielle

Point de méthode 3 (Ordre 1 – variation de la constante)

On considère l'équation (E) $y'+a(t)y = c(t)$. On sait que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est l'ensemble $\{t \mapsto Ce^{-A(t)},\ C \in \mathbb{K}\}$.
Ensuite, la méthode de variation de la constante consiste à chercher une solution de l'équation différentielle de la forme $f : t \mapsto C(t)e^{-A(t)}$.
La manière la plus rigoureuse de la rédiger est comme suit :
« Soit f une fonction dérivable sur I. Posons $g : t \mapsto f(t)e^{A(t)}$. Alors $f : t \mapsto g(t)e^{-A(t)}$, et on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de (E)} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathrm{I},\ f'(t) + a(t)f(t) = c(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathrm{I},\ g'(t)e^{-A(t)} = c(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathrm{I},\ g'(t) = c(t)e^{A(t)}. \end{aligned}$$

À partir de ce moment, calculer g revient à chercher une primitive d'une fonction.
Remarque. Si on cherche juste **une** solution particulière, il suffit de donner **une** primitive de $t \mapsto c(t)e^{A(t)}$. Si on rajoute les constantes, on trouve directement toutes les solutions de l'équation différentielle.

Point de méthode 4 (Ordre 2 – équation homogène à coefficients constants)

Si l'on doit résoudre l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$, on considère l'équation caractéristique

$$ar^2 + br + c = 0,$$

- **si on cherche des solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$,**
  - si $b^2 - 4ac \neq 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions r_1 et r_2 et l'ensemble des solutions est $\{t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t},\ (A, B) \in \mathbb{C}^2\}$,
  - si $b^2-4ac = 0$, l'équation caractéristique possède une seule solution r_0 et l'ensemble des solutions est $\{t \mapsto (A + Bt)e^{r_0 t},\ (A, B) \in \mathbb{C}^2\}$.
- **si on cherche des solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,** (a, b et c sont réels aussi)
  - si $b^2 - 4ac > 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions r_1 et r_2 et l'ensemble des solutions est $\{t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t},\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$,
  - si $b^2-4ac = 0$, l'équation caractéristique possède une seule solution r_0 et l'ensemble des solutions est $\{t \mapsto (A + Bt)e^{r_0 t},\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$,
  - si $b^2 - 4ac < 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ et l'ensemble des solutions est $\{t \mapsto e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)),\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

Point de méthode 5 (Ordres 1 et 2 – équation non homogène à coefficients constants)

On ne traite que des seconds membres en $e^{\alpha t}$. Le but est de trouver **une** solution particulière de l'équation différentielle.

1. on considère l'équation $ay' + by = e^{\alpha t}$.
   - Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique $ar + b = 0$, alors on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto Ce^{\alpha t}$.
   - Si α est racine de l'équation caractéristique $ar+b = 0$, alors on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto Cte^{\alpha t}$.
2. on considère l'équation $ay'' + by' + cy = e^{\alpha t}$.
   - Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique $ar^2+br+c = 0$, alors on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto Ce^{\alpha t}$.
   - Si α est racine simple de l'équation caractéristique $ar^2+br+c = 0$, alors on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto Cte^{\alpha t}$.
   - Si α est racine double de l'équation caractéristique $ar^2+br+c = 0$, alors on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto Ct^2e^{\alpha t}$.

On peut généraliser :

- Seconds membres en sh, ch : on utilise le principe de superposition.
- Seconds memebres en sin, cos : on utilise la partie imaginaire/réelle.
- Seconds membres en $P(t)e^{\alpha t}$. Ce n'est pas au programme mais parfois posé à l'oral (du genre $te^{\alpha t}$). On cherche alors une solution particulière de la forme $Q(t)e^{\alpha t}$ avec Q de degré égal à $\deg(P)$, $\deg(P)+1$ ou $\deg(P)+2$ selon que α n'est pas racine, est racine simple ou est racine double de l'équation caractéristique.

Point de méthode 6 (Ordre 2 – Recherche d'une solution développable en série entière)

Lorsqu'on a une équation différentielle $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, où a et b sont polynomiales en t, il est judicieux de chercher une solution développable en série entière (cf. chapitre 10). Penser que l'on fait en fait une analyse-synthèse et que, dans l'analyse, on suppose que la série entière a un rayon de convergence $R > 0$, pour vérifier, ensuite, dans la synthèse, que la série entière trouvée a un rayon de convergence non nul.

Point de méthode 7 (Ordre 2 – Méthode d'abaissement de l'ordre)

On considère une équation homogène d'ordre 2, à coefficients non constants,

$$y'' + a(t)y' + b(t) = 0.$$

Si on a une solution de l'équation qui ne s'annule pas, nommons-la φ, alors pour f deux fois dérivable, si l'on note $g(t) = \dfrac{f(t)}{\varphi(t)}$, on remarque que f est solution de l'équation différentielle si et seulement si g est solution d'une certaine équation différentielle **du premier ordre.** On peut le vérifier, on a $f(t) = g(t)\varphi(t)$ donc

$$\begin{aligned} f''(t) + a(t)f'(t) + b(t)f(t) &= g''(t)\varphi(t) + 2g'(t)\varphi'(t) + g(t)\varphi''(t) + a(t)g'(t)\varphi(t) + a(t)g(t)\varphi'(t) + b(t)g(t)\varphi(t) \\ &= \varphi(t)g''(t) + (2\varphi'(t) + a(t)\varphi(t))g'(t), \end{aligned}$$

donc g' est solution d'une équation du premier ordre, que l'on peut résoudre, donc on peut trouver comme cela une deuxième solution de l'équation différentielle !

Exemple 8

1. Résoudre $(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x)$ sur $]-1, +\infty[$.
2. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^x$.
3. On considère l'équation $xy'' + 2y' - xy = 0$.
   - Trouver une solution DSE.
   - Résoudre entièrement l'équation sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
   - Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$.
4. (rappels d'algèbre linéaire...) Donner les solutions réelles du système différentiel $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.