N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

TD 11
Équations différentielles

Exercice 1. *Mines-Telecom 24*. Déterminer les solutions sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$y'x\ln x = y(3\ln x + 1)$$

puis par recollement les solutions sur $]0,+\infty[$.

Exercice 2. *CCINP 24*.

1. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$\frac{1}{t\left(t^2-1\right)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}$$
2. Déterminer les solutions de $t\left(t^2-1\right)x' + 2x = t^2$.

Exercice 3. *ENSEA 24*. Intégrer l'équation différentielle : $x'' + 6x' + 9x = 2te^{-3t}$ où $x : t \mapsto x(t)$ est la fonction inconnue.

Exercice 4. *CCINP PC 23*. Soit S l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle :

$$y''(x) - \left(x^4+1\right)y(x) = 0$$

On pose f l'unique élément de S vérifiant $f'(0) = f(0) = 1$.

1. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $g : \left|\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)^2\end{array}\right.$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) \geqslant 0$.
3. Montrer que $f(x)^2 \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
4. Posons $h(x) = f(x)\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{g(t)}$. Montrer que h est définie et $h \in S$.
5. Montrer que (f,h) est une base de S.

Exercice 5. *CCINP 22*. Soit (E) : $\left(x^2-1\right)y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 0$, que l'on cherche à résoudre sur $]-1,1[$.

1. Trouver une fonction polynomiale vérifiant (E).
2. Si l'on pose $y(x) = xz(x)$, quelle équation doit satisfaire $z(x)$ pour que y soit solution de (E) ?
3. Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{4x^2-2}{x\left(x^2-1\right)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x-1}$.
4. Résoudre alors (E) sur $]-1,1[$.

Exercice 6. *Mines-Telecom 22*. Résoudre l'équation différentielle $\begin{cases} y''(x) + xy'(x) + 3y(x) = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 7. *Mines-Ponts 21*. Résoudre $xy''(x) - y'(x) + 4x^3y(x) = 0$ sur $]0,+\infty[$, puis sur $]-\infty,0[$, puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. *Navale 18*. Soit l'équation différentielle $(E) : x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 1$. Trouver une solution particulière, puis résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $x = \mathrm{e}^t$.

Exercice 9. *Centrale 19*. Soit l'équation différentielle (E) $\left(1 + x^2\right) y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$.

1. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = \sqrt{2}$ et $y'(0) = 0$.
2. Déterminer les solutions de (E) développables en séries entières.
3. Résoudre (E) d'une autre manière, en posant $x = \mathrm{sh}(t)$.

Exercice 10. *Mines-Ponts 18*. Soit $(E) : y'' = a(x)y' + b(x)y$ où a et b sont continues sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une base de solutions de (E) constituée d'une fonction paire et d'une fonction impaire si, et seulement si, a est impaire et b paire.

Exercice 11. *Centrale 2022*. Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue. On s'intéresse à l'équation différentielle $(E_{a,b})\, y'' + (1 + q)y = 0, y(0) = a$, et $y'(0) = b$.

1. Tracer avec Python les solutions pour $(a, b) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$ et pour les fonctions $q : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$, $q : t \mapsto \sin(t)\sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $q : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$. et $q : t \mapsto \dfrac{-t^2}{2\left(1+t^2\right)}$. On tracera ces solutions sur l'intervalle $[0, 50]$. Pour quelles fonctions q la solution semble-t-elle bornée ?

On suppose que q est intégrable sur $\mathbf{R}^+$.

2. Soit $z : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin(x - t)f(t)dt$ avec f continue sur $\mathbf{R}^+$. Démontrer que z est deux fois dérivable et calculer $z'' + z$.
3. Soit y une solution de $(E_{a,b})$. Démontrer que, pour $t \in \mathbf{R}^+, 0 \leqslant |y(t)| \leqslant |a| + |b| + \displaystyle\int_0^x |q(t)||y(t)|dt$. *On considèrera $w = y - z$ où z est définie à la question précédente, et f est judicieusement choisie.*
4. En déduire que y est bornée.
5. La condition « q intégrable » est-elle suffisante/nécessaire pour que les solutions de $(E_{a,b})$ soient bornées ?