TD 11
Équations différentielles

Exercice 1. *Mines-Telecom 24*. Déterminer les solutions sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$y'x\ln x = y(3\ln x + 1)$$

puis par recollement les solutions sur $]0,+\infty[$.

Correction

Déjà, pour $x \in]0,1[$, l'équation se réécrit
$$y' - \frac{3\ln(x)+1}{x\ln(x)}y = 0.$$
On sait alors que l'ensemble des solutions de cette équation est
$$\left\{x \mapsto C\mathrm{e}^{A(x)},\ C \in \mathbb{R}\right\},$$
où A es une primitive de $x \mapsto \dfrac{3\ln(x)+1}{x\ln(x)}$. Or, pour $x \in]0,1[$,
$$\frac{3\ln(x)+1}{x\ln(x)} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x\ln(x)},$$
donc
$$A : x \mapsto 3\ln(x) + \ln(|\ln(x)|)$$
est une primitive de cette fonction sur $]0,1[$ (attention au signe de $\ln(x)$). Ainsi,
$$\mathrm{e}^{A(x)} = |\ln(x)|.x^3,$$
donc l'ensemble des solutions de l'équation sur $]0,1[$ est
$$\left\{x \mapsto C|\ln(x)|.x^3,\ C \in \mathbb{R}\right\},$$
La même résolution fonctionne sur $]1,+\infty[$.
Soit désormais une fonction f **dérivable** solution de l'équation sur $]0,+\infty[$. Alors on dispose de C et de D **deux réels** tels que
$$f : x \mapsto \begin{cases} C|\ln(x)|.x^3 = -C\ln(x).x^3 \text{ si } x \in]0,1[, \\ D|\ln(x)|.x^3 = D\ln(x).x^3 \text{ si } x \in]1,+\infty[, \end{cases}$$
Déjà, une telle fonction est prolongeable par continuité en 1 . On remarque qu'alors f est dérivable sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ et que
$$f' : x \mapsto \begin{cases} -Cx^2 - 3Cx^2\ln(x) \text{ si } x \in]0,1[, \\ Dx^2 + 3Dx^2\ln(x) \text{ si } x \in]1,+\infty[, \end{cases}$$
ces deux quantités tendent vers 0 en 0 donc, **par le théorème du prolongement du caractère $\mathscr{C}^1$**, f est nécessairement $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 2. *CCINP 24*.

1. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$\frac{1}{t\left(t^2-1\right)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}$$

Correction

Comme à chaque fois, la version officielle en PSI est que l'on a le droit de tout remettre au même dénominateur et d'identifier les coefficients. Cependant, ici, je vais proposer la méthode « MPSI » : on part de l´égalité

$$\frac{1}{t\left(t^2-1\right)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t-1}+\frac{c}{t+1}$$

- on la multiplie par t et on évalue en 0, ce qui donne $-1=a$
- on la multiplie par $t-1$ et on évalue en 1, ce qui donne $\frac{1}{2}=b$
- on la multiplie par $t+1$ et on évalue en -1, ce qui donne $\frac{1}{2}=c$.

On en déduit que

$$\frac{1}{t\left(t^2-1\right)}=-\frac{1}{t}+\frac{1}{2(t-1)}+\frac{1}{2(t+1)}.$$

2. Déterminer les solutions de $t\left(t^2-1\right)x'+2x=t^2$.

Correction

Déjà, une équation différentielle se résout sur un intervalle. Pour l'équation différentielle considérée, les 4 intervalles sur lesquels on peut la résoudre sont

$$\mathrm{I}_1=]-\infty,-1[,\ \mathrm{I}_2=]-1,0[,\ \mathrm{I}_3=]0,1[,\ \mathrm{I}_4=]1,+\infty[$$

Soit I l'un de ces quatre intervalles (on essaie, pour le moment, d'être les plus génériques possibles). L'équation se réécrit

$$x'(t)+\frac{2}{t(t^2-1)}x(t)=\frac{t^2}{t(t^2-1)}=\frac{t}{t^2-1}.$$

Solutions de l'équation homogène. On note $a(t)=\dfrac{2}{t(t^2-1)}$. Par la question précédente, $a(t)=\dfrac{-2}{t}+\dfrac{1}{t-1}+\dfrac{1}{t+1}$. Une primitive de a est $A : t\mapsto -2\ln|t|+\ln|t-1|+\ln|t+1|$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est l'ensemble des fonctions de la forme

$$t\mapsto Ce^{-A(t)}=Ce^{2\ln|t|-\ln|t-1|-\ln|t+1|}=C\frac{t^2}{|t-1|.|t+1|}$$

Solutions de l'équation générale. Soit f une fonction définie sur un des intervalles I_j, et g vérifiant :

$$\forall t\in\mathrm{I}_j,\ f(t)=g(t)\frac{t^2}{|t-1|.|t+1|}$$

Alors on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de l'équation } &\Leftrightarrow \forall t\in\mathrm{I}_j,\ g'(t)\frac{t^2}{|t-1|.|t+1|}=\frac{t^2}{t^2-1}\\ &\Leftrightarrow \forall t\in\mathrm{I}_j,\ g'(t)=\frac{1}{t}\frac{|t^2-1|}{t^2-1}\end{aligned}$$

Là, il faut distinguer les intervalles :

- sur $]-\infty,-1[$, alors $t^2-1>0$, donc f est solution de l'équation si et seulement si $g'(t)=\dfrac{1}{t}$, i.e. $g(t)=\ln(-t)+C$, $C\in\mathbb{R}$. Ainsi, f est de la forme
$$t\mapsto(\ln(-t)+C)\frac{t^2}{t^2-1}.$$
- sur $]-1,-0[$, alors $t^2-1<0$, donc f est solution de l'équation si et seulement si $g'(t)=-\dfrac{1}{t}$, i.e. $g(t)=-\ln(-t)+C$, $C\in\mathbb{R}$. Ainsi, f est de la forme
$$t\mapsto(-\ln(-t)+C)\frac{t^2}{t^2-1}.$$
- sur $]0,1[$, alors $t^2-1<0$, donc f est solution de l'équation si et seulement si $g'(t)=-\dfrac{1}{t}$, i.e. $g(t)=-\ln(t)+C$, $C\in\mathbb{R}$. Ainsi, f est de la forme
$$t\mapsto(-\ln(t)+C)\frac{t^2}{t^2-1}.$$
- sur $]1,+\infty[$, alors $t^2-1>0$, donc f est solution de l'équation si et seulement si $g'(t)=\dfrac{1}{t}$, i.e. $g(t)=\ln(t)+C$, $C\in\mathbb{R}$. Ainsi, f est de la forme
$$t\mapsto(\ln(t)+C)\frac{t^2}{t^2-1}.$$

Exercice 3. *ENSEA 24*. Intégrer l'équation différentielle : $x''+6x'+9x=2te^{-3t}$ où $x:t\mapsto x(t)$ est la fonction inconnue.

Correction

Il s'agit d'une application directe du cours de sup.

Équation homogène. On a affaire à une équation du second ordre à coefficients constants, d'équation caractéristique
$$r^2+6r+9=0 \text{ i.e. } (r+3)^2=0,$$
équation qui possède une racine double égale à -3. Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est
$$\left\{t\mapsto(\lambda+\mu t)e^{-3t},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$
Recherche d'une solution particulière. On a un second membre de la forme $P(t)e^{\alpha t}$, avec $\alpha=-3$, racine **double** de l'équation caractéristique. On va alors chercher une solution particulière de la forme $h(t)=at^3e^{-3t}$. Or,
$$h'(t)=3at^2e^{-3t}-3at^3e^{-3t}$$
et
$$h''(t)=6ate^{-3t}-18at^2e^{-3t}+9at^3e^{-3t}$$

Donc

$$h''(t)+6h'(t)+9h(t) = 6at\mathrm{e}^{-3t}-18at^2\mathrm{e}^{-3t}+9at^3\mathrm{e}^{-3t}+18at^2\mathrm{e}^{-3t}-18at^3\mathrm{e}^{-3t}+9at^3\mathrm{e}^{-3t} = 6at\mathrm{e}^{-3t}$$

Donc h est solution particulière de l'équation si et seulement si $a = \dfrac{1}{3}$.
Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\left\{t \mapsto \frac{1}{3}t^3\mathrm{e}^{-3t} + (\lambda+\mu t)\mathrm{e}^{-3t}, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice 4. *CCINP PC 23*. Soit S l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle :

$$y''(x) - \left(x^4+1\right)y(x) = 0$$

On pose f l'unique élément de S vérifiant $f'(0) = f(0) = 1$.

1. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Correction

On pourrait presque dire « c'est du cours ».

2. Soit $g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)^2 \end{array} \right.$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) \geqslant 0$.

Correction

La fonction g est bien deux fois dérivable et pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$g''(x) = 2f(x)f''(x) + 2f'(x)^2 = 2(x^4+1)f(x)^2 + 2(f'(x))^2 \geqslant 0.$$

(on a utilisé le fait que f était solution de l'équation différentielle)

3. Montrer que $f(x)^2 \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Correction

Par positivité de g'', on en déduit que g' est croissante, donc que pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $g'(x) \geqslant g'(0) = 2$.
Ainsi, pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $g(x) \geqslant g(0) + 2t = 1 + 2t$, donc, pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $f(x)^2 \geqslant 1 + 2t \geqslant 1$.

4. Posons $h(x) = f(x)\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{g(t)}$. Montrer que h est définie et $h \in S$.

 nlaillet.math@gmail.com

Correction

Sur $\mathbb{R}_+$, $g(t) \geqslant 0$ donc h est bien définie. En revanche, sur $\mathbb{R}_-$, les choses ne sont pas évidentes du tout ! On remarque que

$$g''(x) = 2(x^4+1)f(x)^2 + 2(f'(x))^2 \geqslant 2,$$

donc $g'(x) \geqslant 2+2t$, donc $g(x) \geqslant 1+2t+2t^2$, de discriminant strictement négatif, donc g ne s'annule jamais. Donc h est bien définie sur tout $\mathbb{R}$, et est dérivable comme produit de fonctions dérivables. On a alors

$$h'(x) = f'(x)\int_0^x \frac{dt}{g(t)} + \frac{f(x)}{g(x)} = f'(x)\int_0^x \frac{dt}{g(t)} + \frac{1}{f(x)},$$

et

$$h''(x) = f''(x)\int_0^x \frac{dt}{g(t)}.$$

Ainsi,

$$h''(x) - (1+x^4)h(x) = (f''(x) - (1+x^4)f(x))\int_0^x \frac{dt}{g(t)} = 0,$$

donc $h \in S$.

5. Montrer que (f,h) est une base de S.

Correction

Comme S est un plan vectoriel, il suffit de vérifier que la famille (f,h) est libre, c'est-à-dire que les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est immédiat car si c'était le cas, on disposerait de λ tel que pour tout x, $h(x) = \lambda f(x)$, donc, en particulier, $h(0) = \lambda f(0)$, donc $\lambda = 0$, ce qui est absurde. Donc (f,h) est une base de S.

Exercice 5. *CCINP 22*. Soit (E) : $\left(x^2-1\right)y''(x)+2xy'(x)-2y(x) = 0$, que l'on cherche à résoudre sur $]-1,1[$.

1. Trouver une fonction polynomiale vérifiant (E).

Correction

Soit P un polynôme vérifiant l'équation différentielle. Notons d son degré. Alors le terme de degré d de

$$(X^2-1)P'' + 2XP' - 2P$$

est $d(d-1)a_d + 2da_d - 2a_d = (d^2-2+2d-2)a_d$. Donc ce terme est nul si et seulement si $d^2+d-2=0$, c'est-à-dire $d=1$ ($d=-2$ est impossible). Ainsi, $P(X) = aX+b$. On a alors

$$(X^2-1)P'' + 2XP' - 2P = 2Xa - 2Xa - 2b,$$

donc P est solution de (E) si et seulement si $P \in \mathrm{Vect}(X)$.

2. Si l'on pose $y(x) = xz(x)$, quelle équation doit satisfaire $z(x)$ pour que y soit solution de (E) ?

Correction

Quand on regarde la question de plus près, on voit que l'on fait une méthode d'abaissement de l'ordre !
En notant $y(x) = xz(x)$, on calcule

$$y'(x) = z(x) + xz'(x) \text{ et } y''(x) = 2z'(x) + xz''(x)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(x^2-1)y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) &= (x^2-1)(2z'(x) + xz''(x)) + 2x(z(x) + xz'(x)) - 2xz(x)\\ &= 2x(x^2-1)z''(x) + (2(x^2-1) + 2x^2)z'(x)\\ &= 2x(x^2-1)z''(x) + 2(2x^2-1)z'(x)\end{aligned}$$

Donc y est solution de (E) si et seulement si $2x(x^2-1)z''(x) + 2(2x^2-1)z'(x) = 0$.

3. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : pour tout $x \in \,]-1, 1[\,$, $\dfrac{4x^2-2}{x\,(x^2-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x-1}$.

Correction

Il s'agit de faire une décomposition en éléments simples. Comme d'habitude, on peut tout mettre au même dénominateur mais, en étant plus astucieux :

- On multiplie l'égalité par x et on évalue en 0, pour trouver $a = 2$.
- On multiplie l'égalité par $x - 1$ et on évalue en 1, pour trouver $c = 1$.
- On multiplie l'égalité par $x + 1$ et on évalue en -1, pour trouver $b = 1$.

4. Résoudre alors (E) sur $]-1, 1[$.

Correction

On résout d'abord l'équation en $\alpha = z'$, donnée par, pour $x \neq 0$,

$$\alpha'(x) + \frac{4x^2-2}{x(x^2-1)}\alpha(x) = 0,$$

On doit faire attention aux intervalles de résolution ! Si l'on note $w(x) = \dfrac{4x^2-2}{x(x^2-1)}$, on dispose de C_1 et C_2 tels que, si on note W une primitive de w, $\alpha(x) = C_1 e^{-W(x)}$ pour $x \in]-1, 0[$ et $\alpha(x) = C_2 e^{-W(x)}$ pour $x \in]0, 1[$. Or, par la question précédente,

$$W : x \mapsto 2\ln|x| + \ln(1+x) + \ln(1-x)$$

Donc, pour $x \in]-1, 0[$,

$$\alpha(x) = C_1 e^{-2\ln|x| - \ln(1+x) - \ln(1-x)} = \frac{C_1}{x^2(1-x^2)} = C_1\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}\right)$$

Donc on dispose de D_1 tel que pour tout x dans $]-1,0[$,

$$z(x) = C_1\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(1-x)\right) + D_1,$$

c'est-à-dire que

$$y(x) = C_1 + C_1 x \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + D_1 x$$

De même, sur $]0,1[$,

$$y(x) = C_2 + C_2 x \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + D_2 x$$

Or, y doit être continue en 0 donc $C_1 = C_2$ (notons-les C). De plus, y doit être dérivable en 0, de dérivée continue, et, sur $]-1,0[$,

$$y'(x) = C\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + Cx\left(-\frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(1-x)\right) + D_1 \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} D_1$$

De même, $y'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} D_2$, donc $D_1 = D_2 = D$. Finalement, on dipose de C et D tels que

$$y(x) = C\left(1 + x\ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right) + Dx.$$

Réciproquement, une telle fonction est bien $\mathscr{C}^2$ et solution de l'équation différentielle. L'ensemble des solutions de la fome ci-dessus forme un plan vectoriel, ce qui assure que l'on ait trouvé toutes les solutions.

Exercice 6. *Mines-Telecom 22*. Résoudre l'équation différentielle $\begin{cases} y''(x) + xy'(x) + 3y(x) = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$

Correction

C'est un exercice bien plus long qu'il n'y paraît.
Cherchons d'abord une solution développable en série entière. Soit $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Alors

$$\begin{aligned} f''(x) + xf'(x) + 3f(x) &= \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^n + 3\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^n + 3\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+3)a_n\right)x^n. \end{aligned}$$

Donc f est solution de l'équation différentielle si et seulement si pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = -\frac{n+3}{(n+2)(n+1)}a_n.$$

On écrit alors que

- pour $n = 2p+1$,

$$\begin{aligned}
a_{2p+1} &= -\frac{2p+2}{(2p+1)(2p)} a_{2p-1} \\
&= +\frac{(2p+2)2p}{(2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2)} a_{2p-3} \\
&= \dots \\
&= \frac{\prod_{k=2}^{p+1}(2k)}{(2p+1)!} a_1 \\
&= (-1)^p \frac{2^p(p+1)!}{(2p+1)!} a_1
\end{aligned}$$

- pour $n = 2p$,

$$\begin{aligned}
a_{2p} &= -\frac{2p+1}{(2p)(2p-1)} a_{2p-2} \\
&= (-1)^p \frac{\prod_{k=1}^{p}(2k+1)}{(2p)!} a_0 \\
&= (-1)^p \frac{2p+1}{\prod_{k=1}^{p}(2k)} a_0 \\
&= (-1)^p \frac{2p+1}{2^p p!} a_0
\end{aligned}$$

Or, $f'(0) = 0$ donc $a_1 = 0$, et $f(0) = 1$, d'où $a_0 = 1$. On en déduit que pour x dans $]-R, R[$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{p\geqslant 0} (-1)^p \frac{(2p+1)}{2^p p!} x^{2p} \\
&= \sum_{p\geqslant 0} \frac{2p+1}{p!} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^p \\
&= 2\sum_{p\geqslant 1} \frac{1}{(p+1)!} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^p + \sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{p!} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^p \\
&= \left(1 - x^2\right) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Exercice 7. *Mines-Ponts 21*. Résoudre $xy''(x) - y'(x) + 4x^3 y(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$, puis sur $]-\infty, 0[$, puis sur $\mathbb{R}$.

Correction

On cherche déjà s'il y a des solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$. Soit $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$

une fonction DSE sur un voisinage de 0. Alors

$$\begin{aligned}
xf''(x) - 4xf'(x) + 2f(x) &= x\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n\geqslant 1} na_n x^{n-1} + 4x^3\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \\
&= \sum_{n\geqslant 1}(n+1)na_{n+1}x^n - \sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n\geqslant 3} 4a_{n-3}x^n \\
&= 2a_2x + 6a_3x^2 - a_1 - 2a_2x - 3a_3x^2 + \sum_{n\geqslant 3}\left((n+1)(n-1)a_{n+1} + 4a_{n-3}\right)x^n.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que $a_1 = 0$, que $a_3 = 0$, que a_2 est quelconque et que pour tout $n \geqslant 3$, $(n+1)(n-1)a_{n+1} - 4a_{n-3}$, c'est-à-dire que

$$\forall n \geqslant 0,\ (n+4)(n+2)a_{n+4} + 4a_n = 0.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 4$,

$$a_n = -\frac{4}{n(n-2)}a_{n-4}$$

Étant donné que $a_1 = a_3 = 0$, on en déduit par récurrence immédiate que tous les termes impairs sont nuls. Ensuite, pour les termes pairs, on va distinguer les multiples de 4 et ceux de la forme $4p+2$. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$

- Déjà,

$$\begin{aligned}
a_{4p} &= -\frac{4}{4p(4p-2)}a_{4p-4} \\
&= \dots \\
&= (-1)^p\frac{4^p}{\prod_{k=1}^{2p}(2k)}a_0 \\
&= (-1)^p\frac{1}{(2p)!}a_0.
\end{aligned}$$

- Ensuite, de même,

$$\begin{aligned}
a_{4p+2} &= \frac{4}{(4p+2)4p}a_{4p-2} \\
&= \dots \\
&= \frac{4^p}{\prod_{k=2}^{2p+1}(2k)}a_2 \\
&= (-1)^p\frac{1}{(2p+1)!}a_0.
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0\sum_{p\geqslant 0}(-1)^p\frac{1}{(2p)!}x^{4p} + a_1\sum_{p\geqslant 0}(-1)^p\frac{1}{(2p)!}x^{4p+2} \\
&= a_0\cos(x^2) + a_1\sin(x^2).
\end{aligned}$$

Réciproquement, de telles fonctions sont solution. De plus, comme $x \mapsto \cos(x^2)$ et $x \mapsto \sin(x^2)$ ne sont pas colinéaires, on en déduit qu'elles forment une base de l'espace des solutions **lorsqu'on résout l'équation sur un intervalle**. Ainsi, sur $]-\infty, 0[$ comme sur $]0, +\infty[$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\left\{x \mapsto a_0 \cos(x^2) + a_1 \sin(x^2),\ (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Maintenant, si f est une solution de l'équation sur tout $\mathbb{R}$, on dispose de a_0, a_1, b_0, b_1 tels que

$$f(x) = \begin{cases} a_0 \cos(x^2) + a_1 \sin(x^2) \text{ si } x < 0 \\ b_0 \cos(x^2) + b_1 \sin(x^2) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Or, f doit être $\mathscr{C}^2$. En particulier, f est continue en 0 donc $a_0 = b_0 = \lambda$. De plus, f doit être $\mathscr{C}^1$, et

$$f'(x) = \begin{cases} -2x\lambda \sin(x^2) + 2a_1 x \cos(x^2) \text{ si } x < 0 \\ -2x\lambda \sin(x^2) + 2b_1 x \cos(x^2) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

cette fonction est bien continue en 0 ! Vérifions ensuite que f est bien dérivable en 0. Pour ce faire, en regardant le taux d'accroissement,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 2a_1 \text{ et } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 2b_1.$$

Il faut donc nécessairement que $a_1 = b_1 = \mu$. Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les

$$\left\{x \mapsto a_0 \cos(x^2) + a_1 \sin(x^2),\ (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 8. *Navale 18*. Soit l'équation différentielle $(E) : x^2 y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 1$. Trouver une solution particulière, puis résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $x = e^t$.

Correction

On remarque que la fontion constante égale à $\frac{1}{2}$ est solution de l'équation différentielle.
Ensuite, on pose f une fonction $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et $g(t) = f(e^t)$. Alors pour tout $x > 0$, $f(x) = g(\ln(x))$. On a alors

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1}{x} g'(\ln(x)) \text{ et } f''(x) = -\frac{1}{x^2} g'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} g''(\ln(x)).$$

On a donc les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de l'équation} &\Leftrightarrow \forall x > 0,\ x^2 f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0,\ -g'(\ln(x)) + g''(\ln(x)) + 4g'(\ln(x)) + 2g(\ln(x)) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ g''(t) + 3g'(t) + 2g(t) = 1. \end{aligned}$$

On a toujours la constante égale à $\frac{1}{2}$ qui est solution particulière. Ensuite, pour résoudre l'équation homogène, on remarque que l'équation caractéristique est $r^2 + 3r + 2 = 0$, de racines évidentes -1 et -2. Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\{t \mapsto$

$\lambda e^{-t} + \mu e^{-2t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation d'origine est

$$\left\{x \mapsto \frac{1+\lambda}{x} + \frac{\mu}{x^2},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 9. *Centrale 19*. Soit l'équation différentielle (E) $\left(1+x^2\right) y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$.

1. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = \sqrt{2}$ et $y'(0) = 0$.

Correction

C'est le théorème de Cauchy linéaire (qui s'applique bien, car $1 + x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les solutions de (E) développables en séries entières.

Correction

Soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0, $R > 0$ son rayon, $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$. Alors

$$\begin{aligned}
(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) &= (1+x^2)\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n\geqslant 1} na_n x^{n-1} - \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n\geqslant 1} na_n x^n - \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n + na_n - a_n\right)x^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2-1)a_n\right)x^n
\end{aligned}$$

Donc f est est solution de l'équation différentielle si et seulement si pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-1)(n+1)a_n = 0, \text{ i.e. } a_{n+2} = -\frac{n-1}{n+2}a_n.$$

Ainsi, pour tout p dans $\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
a_{2p} &= -\frac{2p-3}{2p} a_{2p-2} \\
&= \dots \\
&= (-1)^{p-1} \frac{\prod_{k=2}^{p}(2k-3)}{\prod_{k=2}^{p}(2k)} a_2 \\
&= (-1)^{p-1} \frac{(2p-2)!}{2^{2p-1}(p-1)!p!} a_2 \\
&= (-1)^{p-1} \frac{(2p-2)!}{2^{2p}(p-1)!p!} a_0 \\
&= (-1)^{p-1} \frac{1}{(2p-1)2^{2p}} \binom{2p}{p} a_0 \text{ si } p \geqslant 1.
\end{aligned}$$

Ensuite, on remarque de manière amusante que $a_3 = 0.a_1$ et donc, par récurrence immédiate, tous les termes impairs sont nuls !
Ainsi,

$$f(x) = a_1 x + a_0 + \sum_{p \geqslant 1} (-1)^{p-1} \frac{1}{(2p-1)2^{2p}} \binom{2p}{p} a_0 = a_1 x + a_0 \sqrt{1+x^2}.$$

On a donc résolu l'équation puisqu'on a trouvé deux solutions DSE non colinéaires.

3. Résoudre (E) d'une autre manière, en posant $x = \mathrm{sh}(t)$.

Correction

Cette question est stupide ! ? ! On a déjà trouvé les solutions... Peut-être que l'on cherchait d'autres méthodes pour résoudre l'équation.
Autre méthode 1. Soit f une solution de l'équation. On pose $g(t) = f(\mathrm{sh}(t))$. Alors g est dérivable et pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$g'(t) = \mathrm{ch}(t)f'(\mathrm{sh}(t)) \text{ et } g''(t) = \mathrm{sh}(t)f'(\mathrm{sh}(t)) + \mathrm{ch}(t)^2 f''(\mathrm{sh}(t)).$$

Or, pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$(1 + \mathrm{sh}(t)^2)f''(\mathrm{sh}(t)) + \mathrm{sh}(t)f'(\mathrm{sh}(t)) - f(\mathrm{sh}(t)) = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\mathrm{ch}(t)^2 f''(\mathrm{sh}(t)) + \mathrm{sh}(t)f'(\mathrm{sh}(t)) - f(\mathrm{sh}(t)) = 0, \text{ i.e. } g''(t) - g(t) = 0,$$

donc on en déduit que l'on dispose de λ et μ tels que pour tout t, $g(t) = \lambda \mathrm{sh}(t) + \mu \mathrm{ch}(t)$.
En effet, l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathrm{Vect}(t \mapsto \mathrm{e}^t, t \mapsto \mathrm{e}^{-t}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{sh}, \mathrm{ch})$$

On en déduit donc que $f(x) = \lambda x + \mu\sqrt{1 + x^2}$. Et on vérifie ensuite qu'une telle fonction est solution.

Exercice 10. *Mines-Ponts 18*. Soit $(E) : y'' = a(x)y' + b(x)y$ où a et b sont continues sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une base de solutions de (E) constituée d'une fonction paire et d'une fonction impaire si, et seulement si, a est impaire et b paire.

Correction

Sens direct. On suppose qu'il existe une base de solutions de (E) constituée d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Alors on dispose de f paire et g impaire solutions de l'équation.
Pour tout x, $f(-x) = f(x)$. En dérivant, il vient $-f'(-x) = f(x)$ et $f''(-x) = f(x)$.
Pour tout x, $g(-x) = -g(x)$. En dérivant, il vient $-g'(-x) = -g'(x)$ et $g''(-x) = -g''(x)$.
Or, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f''(x) = a(x)f'(x) + b(x)f(x)$. En évaluant en $-x$, on obtient

$$f''(-x) = a(-x)f'(-x) + b(-x)f(-x), \text{ i.e. } f''(x) = -a(-x)f'(x) + b(-x)f(x)$$

et, de même,

$$g''(-x) = a(-x)g'(-x) + b(-x), \text{ i.e. } -g''(x) = a(-x)g'(x) - b(-x)g(x),$$

c'est-à-dire que

$$g''(x) = -a(-x)g'(x) + b(-x)g(x)$$

En soustrayant ces équations aux équations originales, il vient que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$(a(x)+a(-x))f'(x)+(b(x)-b(-x))f(x) = 0 \text{ et } (a(x)+a(-x))g'(x)+(b(x)-b(-x))g(x) = 0$$

Si on avait $a(x) + a(-x) \neq 0$ en un certain point x, alors, par continuité, $x \mapsto a(x) + a(-x)$ ne s'annulerait pas sur un intervalle I. Alors f et g seraient solution de la même équation différentielle d'ordre 1 (on pourrait diviser par $a(x) + a(-x)$) donc f et g seraient proportionnelles

sur I.
Ceci impliquerait qu'elles soient proportionnelles sur $\mathbb{R}$ (car elles sont aussi solutions sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle d'ordre 2), donc qu'elles soient nulles car l'une est paire et l'autre est impaire. Ceci est absurde ! Donc $x \mapsto a(x) + a(-x)$ s'annule sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, absurde !
Donc pour tout x dans $\mathbb{R}$, $a(x) = -a(-x)$, i.e. a est impaire.
On en déduit que pour tout x, $(b(x) - b(-x))f(x) = (b(x) - b(-x))g(x)$. Par le même raisonnement que précédemment, on en déduit que b est paire.
Sens réciproque. Si a est impaire et b est paire, on remarque que pour toute solution f de (E), $x \mapsto f(-x)$ est aussi solution de E. Ainsi, si on note S l'espace vectoriel des solutions de (E), l'application $\varphi : f \mapsto (x \mapsto f(-x))$ est un endomorphisme de S. On a clairement $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_S$, donc φ est une symétrie. On sait donc que

$$S = \ker(\varphi - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(\varphi + \mathrm{Id}_E).$$

Pour obtenir une base de S constituée d'une fonction paire et d'une fonction impaire, il faut démontrer qu'aucun des deux noyaux ci-dessus est trivial.
Supposons, par l'absurde, que l'on ait $\ker(\varphi - \mathrm{Id}_E) = S$. Alors toute solution de (E) est paire.
Je ne vois pas comment conclure mais j'étais content de mon argument... :(
Essayons autrement ! Soit f l'unique solution de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. On montre que f est paire.
En notant $\tilde{f}(x) = f(-x)$, on remarque que $\tilde{f}$ est solution de E, que $\tilde{f}(0) = 1$ et que $\tilde{f}'(0) = 0$ donc, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on en déduit que $\tilde{f} = f$, donc f est paire.
Soit g l'unique solution de (E) telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. De la même manière que précédemment, on montre que g est impaire !
Les fonctions f et g sont clairement non colinéaires, donc on a trouvé une base de S constituée d'une fonction paire et d'une fonction impaire !

Exercice 11. *Centrale 2022*. Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue. On s'intéresse à l'équation différentielle $(E_{a,b})\, y'' + (1+q)y = 0, y(0) = a$, et $y'(0) = b$.

1. Tracer avec Python les solutions pour $(a, b) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$ et pour les fonctions $q : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$, $q : t \mapsto \sin(t)\sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $q : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$. et $q : t \mapsto \dfrac{-t^2}{2(1+t^2)}$. On tracera ces solutions sur l'intervalle $[0, 50]$. Pour quelles fonctions q la solution semble-t-elle bornée ?

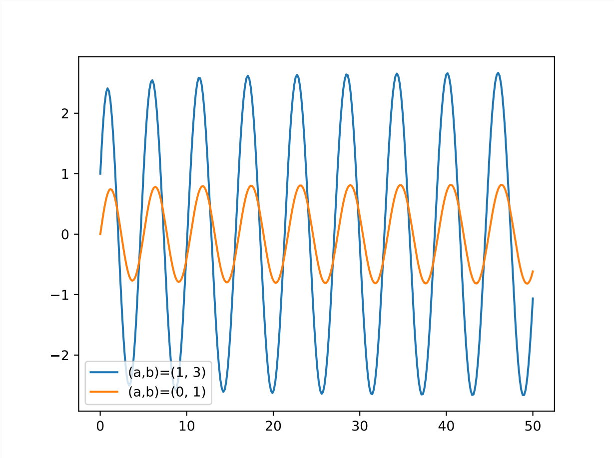
Correction

C'est un peu laborieux, mais on veut vérifier que vous savez maîtriser `odeint` et que vous savez, en posant $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, réécrire l'équation $Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -(1+q(t))y(t) \end{pmatrix}$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integr

def q(t):
    return 1/(1+t)**(1/2)

def F(Y,t):
    return [Y[1],-(1+q(t))*Y[0]]
```

```
T = np.linspace(0.01,50,300)

for (a,b) in [(1,3),(0,1)]:
    sol = integr.odeint(F,[a,b],T)
    s = "(a,b)="+str((a,b))
    plt.plot(T,sol[:,0],label = s)
plt.legend()
plt.show()
```

On obtient par exemple



Je ne sais pas faire de commentaire intelligent sur cette question. À première vue, toutes les solutions ont l'air bornées :(

On suppose que q est intégrable sur $\mathbf{R}^+$.

2. Soit $z : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)f(t)dt$ avec f continue sur $\mathbf{R}^+$. Démontrer que z est deux fois dérivable et calculer $z''+z$.

Correction

Alors, là, on pourrait croire à une dérivation d'intégrales à paramètres, mais, en fait,

$$z(x) = \int_0^x (\sin(x)\cos(t) - \sin(t)\cos(x))f(t)dt = \sin(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt - \cos(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt.$$

Ainsi, z est dérivable comme somme/produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned} z'(x) &= \cos(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt + \sin(x)\cos(x)f(x) + \sin(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt - \cos(x)\sin(x)f(x) \\ &= \cos(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt. \end{aligned}$$

Donc z' est dérivable comme somme/produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned} z''(x) &= -\sin(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt + \cos^2(x)f(x) + \cos(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt + \sin^2(x)f(x) \\ &= \int_0^x (\cos(x)\sin(t) - \sin(x)\cos(t))f(t)dt + f(x) = -z(x) + f(x). \end{aligned}$$

Donc $z'' + z = f$.

3. Soit y une solution de $(E_{a,b})$. Démontrer que, pour $t \in \mathbf{R}^+, 0 \leqslant |y(t)| \leqslant |a| + |b| + \int_0^x |q(t)||y(t)|dt$. *On considèrera $w = y - z$ où z est définie à la question précédente, et f est judicieusement choisie.*

Correction

On pose $f = -qy$ et z comme ci-dessus. Alors $z''+z = -qy$, donc, comme $y''+y = -qy$, si on pose $w = y - z$, $w'' + w = 0$. Donc on dispose de A et B tels que $w = A\cos(x) + B\sin(x)$. Comme $w(0) = y(0) - z(0) = a - 0$ et $w'(0) = y'(0) - z'(0) = b - 0$, on en déduit que $y - z = a\cos(x) + b\sin(x)$, donc

$$y(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^x \sin(x-t)y(t)q(t)dt.$$

Ainsi,

$$|y(x)| \leqslant |a| + |b| + \int_0^x |y(t)||q(t)|dt.$$

4. En déduire que y est bornée.

Correction

C'est une question difficile, c'est un résultat qui s'appelle le Lemme de Gronwall. Je pense que les examinateurs s'attendaient à ce que cette question soit discutée au moment de la présentation orale, et non pas préparée au brouillon.
Les choses intelligentes à dire sont les suivantes : si on avait égalité, on aurait, en posant $h = |y|$,

$$h(x) = |a| + |b| + \int_0^x h|q|$$

donc, en dérivant,

$$h' = h|q|$$

donc $h = Ce^{\int_0^x q}$, et, en évaluant en 0, $C = |a| + |b|$. Comme on a une inégalité, on peut essayer de démontrer que, en fait

$$|y(x)| \leqslant (|a| + |b|)e^{\int_0^x |q(t)|dt},$$

ou, inégalité plus forte mais en fait plus simple à démontrer, on va vérifier que

$$|a| + |b| + \int_0^x |y(t)||q(t)|dt \leqslant (|a| + |b|)e^{\int_0^x |q(t)|dt}.$$

Pourquoi vérifier cette inégalité-là ? Parce qu'on se dit qu'on peut la démontrer en étudiant une fonction que l'on dérivera ! On pose alors

$$\varphi : x \mapsto \frac{|a| + |b| + \int_0^x |y(t)||q(t)|dt}{(|a| + |b|)e^{\int_0^x |q(t)|dt}}.$$

Alors φ est dérivable et pour tout x,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{|y(x)||q(x)|e^{\int_0^x |q(t)|dt} - \left(|a| + |b| + \int_0^x |y(t)||q(t)|dt\right).|q(x)|e^{\int_0^x |q(t)|dt}}{e^{2\int_0^x |q(t)|dt}} \\ &= e^{\int_0^x |q(t)|dt}|q(x)|\frac{|y(x)| - \left(|a| + |b| + \int_0^x |y(t)||q(t)|dt\right)}{e^{2\int_0^x |q(t)|dt}} \leqslant 0.\end{aligned}$$

Donc φ est décroissante. Comme $\varphi(0) = 1$, on en déduit que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\varphi(x) \leqslant 1$, ce qui correspond à l'inégalité désirée !
Ainsi, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$|y(x)| \leqslant (|a| + |b|)e^{\int_0^x |q(t)|dt} \leqslant |y(x)| \leqslant (|a| + |b|)e^{\int_0^{+\infty} |q(t)|dt},$$

donc y est bornée.

5. La condition « q intégrable » est-elle suffisante/nécessaire pour que les solutions de $(E_{a,b})$ soient bornées ?

Correction

Si q est intégrable, y est bornée. Mais la réciproque est fausse, il suffit de prendre q constante positive non nulle, qui n'est pas intégrable mais qui assure le caractère borné de y (oscillateur harmonique).