Semaine 14 – Colle du lundi 20/01

<table>
<tr><th>Nom</th><th>Énoncé et commentaires</th><th>Note</th></tr>
<tr><td></td><td>

Colle python. On munit l'espace E des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues et bornées de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in E$, on pose $\Phi(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(xt)\dfrac{f(t)}{1+t^2}dt$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E et que pour tout f dans E, $\|\Phi(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.
2. Soit g l'image par Φ de la fonction constante égale à 1 . Avec Python, tracer g sur le segment $[0, 1000]$ et émettre une conjecture sur la limite de g.
3. Calculer la limite de g en $+\infty$.
4. Étudier la dérivabilité de g et calculer sa dérivée.
5. Calculer $g(x) + g\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On pourra utiliser Python pour intuiter le résultat.

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

1. **Cours.** Quel est le type de convergence de la somme d'une série entière ? Où y a-t-il convergence simple, convergence normale ?
2. Rayon de convergence de $\sum \ln\left(1 + \dfrac{1}{8^n}\right) x^{3n}$.
3. On pose pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$ $g(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-tx}}{t+1}dt$.
   (a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) En déduire une équation différentielle simple vérifiée par g et un équivalent en $+\infty$ de g.
   (d) Montrer que pour tout $x > 0$, $g(x) = e^{-x}\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t}dt$. En déduire la limite de g en 0.
   (e) Montrer que $g(x) \sim_{x\to 0^+} -\ln(x)$.

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

1. **Cours.** Caractère $\mathscr{C}^1$ de la somme d'une série entière.
2. Rayon de convergence de $\sum \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.
3. On pose, pour $x \geqslant 0$,
$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\frac{1-\cos t}{t^2}dt$$
   (a) Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.
   (b) Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F''(x)$.
   (c) En déduire la valeur de $F(0)$ puis la valeur de l'intégrale convergente
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$$

</td><td></td></tr>
</table>