Semaine 13 – Colle du lundi 13/01 à 8h

<table>
<tr><td>Nom</td><td>Énoncé et commentaires</td><td>Note</td></tr>
<tr><td></td><td>Planche python.Soit : $\forall x > 0,\ F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(t+x)}\,\mathrm{d}t$
1. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$
2. [Py] Tracer le graphe de $F(x)$. Que peut-on conjecturer lorsque $x \to +\infty$?
3. Montrer cette conjecture.
4. [Py] Tracer le graphe de $xF(x)$. Peut-on conjecturer un équivalent de F lorsque $x \to +\infty$.
5. Démontrer cet équivalent.
6. Donner une équation différentielle vérifiée par F.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>1. Cours. Énoncer très proprement le théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$ des intégrales à paramètre.
2. (a) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*\quad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$
(b) On admet que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$
En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
(c) Démontrer le résultat admis.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>1. Cours. Lemme d'Abel : énoncé + propriété fondamentale du rayon de convergence.
2. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$.
(a) Déterminer le domaine de définition de f.
(b) Démontrer que f est continue sur son domaine de définition.
(c) Calculer $f(x)+f(x+1)$ pour tout $x>0$.
(d) En déduire un équivalent de f en 0.
(e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.</td><td></td></tr>
</table>