# TD 12
# Séries entières et variables aléatoires

**Exercice 1.** *Centrale PC 24*. On dispose d'une pièce donnant pile avec un probabilité $p \in ]0,1[$. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pile. On note $N$ le nombre de lancers nécessaires pour obtenir ce premier pile. On lance ensuite $N$ fois cette pièce et on note $X$ le nombre de pile obtenus au cours de ces $N$ lancers.

1. Quelle est la loi de $N$ ? Donner la loi du couple $(N, X)$.
2. En déduire la loi de $X$.
3. Soit $\lambda \in ]0,1[$. Soient $U, V$ deux variables aléatoires indépendantes telles que $U \sim \mathcal{B}(\lambda)$ et $V \sim \mathcal{G}(\lambda)$. Trouver $\lambda$ tel que $UV \sim X$.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

**Exercice 2.** *Mines-Télécom 24*. Soit $S(t) = \lambda \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$.

1. Donner le rayon de convergence puis calculer la somme de cette série entière.
2. Trouver $\lambda$ tel que $S(t)$ soit la série génératrice d'une variable aléatoire $X$.
3. Donner la loi de $X$ puis, si elles existent, son espérance et sa variance.

**Exercice 3.** *CCINP 24*.

1. Donner le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^n}$ pour $n = 1$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in ]0,1[$, $q = 1-p$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \dbinom{n+k-1}{k} p^n q^k$. Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur $\mathbb{N}$.
3. Soit $X$ une variable aléatoire vérifiant : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = p_k$. Déterminer la fonction génératrice de $X$, puis calculer l'espérance et la variance de $X$.

**Exercice 4.** *Mines 17 et exo ultra-classique*. On effectue des expériences aléatoires et indépendantes : $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, avec chaque $X_i$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p$. On note (quand elle existe...) $T_n$ l'étape à laquelle on a eu le $n$-ième succès.

1. Donner la loi de $T_1$.
2. Déterminer la loi de $T_2$ puis de $T_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Donner le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-t)^n}$.
4. Calculer la fonction génératrice de $T_n$ et en déduire l'espérance de $T_n$.

**Exercice 5.** *Mines-Télécom 23*. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires indépendants suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. On note $X = \operatorname{card}\{i \leqslant n, X_i = 1\}$ et $Z = \operatorname{card}\{i \leqslant n, X_i = X_1\}$.

1. Préciser la loi de $X$, son espérance et sa variance.
2. Les variables $X$ et $Z$ sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la fonction génératrice de $Z$ puis son espérance.

**Exercice 6.** *CCINP 17, 18, 24...*. Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi, admettant une variance, telles que $Z = X + Y + 1$ suive la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de $X$ en fonction de $p$.
2. Déterminer la fonction génératrice de $X$. En déduire la loi de $X$.

**Exercice 7.** *Centrale 2016, 2023*. Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Rappeler la définition de la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire.
   Dans la suite, on suppose : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Donner la valeur de $G_X(t)$.
2. Montrer :
$$\forall t \geqslant 1 \forall a \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^a}$$
3. En déduire : $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$
4. Comparer avec une majoration obtenue via l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

**Exercice 8.** *Navale 24*. Soit $X$ une variable aléatoire telle que : $\forall k \geqslant 1, \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{k-1}{2^k}$.

1. Vérifier que l'on définit bien ainsi une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}^*$.
2. Déterminer la fonction génératrice de $X$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

**Exercice 9.** *X PC 23*.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) \leqslant e^{x^2/2}$.
2. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda) \leqslant e^{-\lambda^2/2n}$.

**Exercice 10.** *Centrale 24*. On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$ dans lesquelles sont répartis $2n$ jetons numérotés de 1 à $2n$. L'urne $U_1$ contient initialement $r$ jetons ( $0 \leqslant r \leqslant n$ ). On tire au hasard un numéro de jeton : s'il est dans $U_1$ on le place dans $U_2$ et inversement. On note $X_p$ la variable aléatoire donnant le nombre de jetons contenu dans $U_1$ après $p$ tirages.

1. Réaliser une fonction `jeu(n,r,p)` qui renvoie $X_p$.
2. Pour $n = 9$ et $r = 4$, donner une estimation de l'espérance de $X_p$ pour $p \in [\![100, 200]\!]$.
3. Tracer, pour différentes valeurs de $n$ et $r$, l'espérance de $X_p$ en fonction de $p$ pour $p \in [\![0, 4n]\!]$.
   Que peut-on conjecturer ?
4. Déterminer l'espérance de $X_1$.
5. Pour $k \in [\![1, 2n-1]\!]$, montrer que : $P(X_{p+1} = k) = \dfrac{2n-k+1}{2n} P(X_p = k-1) + \dfrac{k+1}{2n} P(X_p = k+1)$.
   Que peut-on dire pour $k = 0$ et $k = 2n$ ?
6. Montrer que : $G_{X_{p+1}}(s) = sG_{X_p}(s) + \dfrac{1-s^2}{2n} G'_{X_p}(s)$.
7. Calculer l'espérance de $X_p$ et prouver la conjecture établie en 3).