

PSI – Programme de colles

Semaine 15 – du 27 au 31 janvier 2025

Programme en bref.

- Cours et exos sur les séries entières.
- Il est tout à fait possible de faire le lien entre équations différentielles et séries entières (recherche de solutions DSE d'une équation différentielle).

Exemples de questions de cours

1. Si $a_n = O(b_n)$ alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal au rayon de convergence de $\sum b_n z^n$
2. Continuité de la somme d'une série entière sur $] -R, R[$.
3. Caractère \mathcal{C}^1 de la somme d'une série entière sur $] -R, R[$.
4. Expression des coefficients a_n en fonction des dérivées en 0 de $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et unicité du DSE.
5. $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
6. DSE de e^z .
7. DSE de sh/ch/ sin / cos en connaissant celui de e^z
8. DSE de $\ln(1 \pm x)$
9. DSE de arctan
10. DSE de $(1+x)^\alpha$ (pour α non entier)
11. DSE explicite et joliment présenté de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ (en admettant celui de $(1+x)^\alpha$)

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Séries entières

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- étudier la convergence d'une série entière et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;
- étudier les propriétés de sa somme en se limitant à la continuité dans le cas d'une variable complexe ;
- établir les développements en série entière des fonctions usuelles.

Les séries entières trouveront un cadre d'application dans la notion de fonction génératrice en probabilités et au détour d'exemples de résolution d'équations différentielles linéaires.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Rayon de convergence

Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.

Lemme d'Abel :

si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty[$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

Intervalle ouvert de convergence.

Disque ouvert de convergence.

Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) :

- si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;
- si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$, et elle diverge grossièrement si $|z| > R$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R(\sum n^\alpha x^n) = 1$.

Le résultat s'applique en particulier lorsque $a_n = o(b_n)$.

Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.

Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

La limite du rapport $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ peut être directement utilisée.

b) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.

Caractère \mathcal{C}^∞ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.

Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.

L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.

$$\text{Relation } R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right).$$

c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Fonction développable en série entière sur un intervalle $] -r, r[$.

Série de Taylor d'une fonction de classe \mathcal{C}^∞ .

Unicité du développement en série entière.

Développements des fonctions usuelles.

Formule de Taylor avec reste intégral.

Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe sur le disque ouvert de convergence.

Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.

Développement de $\exp(z)$ sur \mathbb{C} .

La démonstration est hors programme.