Chapitre 13
Endomorphismes dans les espaces euclidiens – résumé de cours

Dans tout le chapitre, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme associée.

1 Isométries

Définition 1

Une isométrie de E est un endomorphisme u de E tel que pour tout x dans E, $\|u(x)\| = \|x\|$. On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de E, appelé groupe orthogonal.

Proposition 2

1. $O(E) \subset GL(E)$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On a les équivalences suivantes :
   - $u \in O(E)$
   - $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
   - pour toute BON $(e_1, \dots, e_n)$ de E, $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une BON.

Exemple 3

Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.

Proposition 4

$O(E)$ est un groupe, ou même plutôt un sous-groupe de $GL(E)$:

1. $\mathrm{Id}_E \in O(E)$,
2. $\forall (u, v) \in O(E)^2,\ u \circ v \in O(E)$,
3. $\forall u \in O(E),\ u^{-1} \in O(E)$.

Proposition 5

Si $u \in O(E)$ et si F est un sous-espace stable par u, $F^\perp$ l'est aussi.

Définition 6

Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale lorsque $A^\top A = \mathrm{I}_n$. On note $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Proposition 7

On a les équivalences suivantes :

1. M est orthogonale
2. Les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
3. Il existe une isométrie u et une base orthonormée $\mathscr{B}$ telles que $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Proposition 8

Soit M une matrice orthogonale. Alors $\det(M) = \pm 1$.

Définition 9

On note $SO_n(\mathbb{R})$ le groupe spécial orthogonal, défini par

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}),\ \det(M) = 1\}.$$

Proposition 10

$O(n)$ et $SO(n)$ sont des sous-groupes de $(GL_n(\mathbb{R}), +)$, c'est-à-dire que

1. $\mathrm{I}_n \in O_n(\mathbb{R})$ (respectivement $SO_n(\mathbb{R})$)
2. $\forall (M, N) \in O_n(\mathbb{R})^2,\ M \times N \in O_n(\mathbb{R})$ (respectivement, $\forall (M, N) \in SO_n(\mathbb{R})^2,\ M \times N \in SO_n(\mathbb{R})$)
3. $\forall M \in O_n(\mathbb{R}),\ M^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

Remarque 11

Il existe un groupe dit spécial linéaire, $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(M) = 1\}$.

2 Un peu de « géométrie »

2.1 Orientation des bases

Définition 12

1. On dit que deux bases orthonormales ont même orientation lorsque la matrice de passage de l'une vers l'autre a un déterminant égal à $+1$.
2. Un espace euclidien orienté est un espace euclidien dans lequel on a choisi une base orthonormée de référence $\mathscr{C}_0$.
3. Soit E un espace euclidien orienté par une base orthonormée $\mathscr{C}_0$. Une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E est dite
   (a) directe si la matrice de passage de $\mathscr{C}_0$ à $\mathscr{B}$ est de déterminant 1,
   (b) indirecte si la matrice de passage de $\mathscr{C}_0$ à $\mathscr{B}$ est de déterminant -1 .

Remarque 13

1. Dans $\mathbb{R}^n$, on a tendance à orienter par rapport à la base canonique.
2. Si on a choisi une base de référence $\mathscr{C}_0$, cela revient au même d'orienter par rapport à n'importe quelle base orthonormée directe.

Proposition 14 (et définition)

Si E est orienté, le déterminant d'une famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$ dans une base orthonormée directe de E ne dépend pas de cette base : c'est le produit mixte, noté $[e_1, \dots, e_n]$.

Remarque 15

1. Une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de E est une base de E si et seulement si $[u_1, \dots, u_n] \neq 0$.
2. Pour l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^2$, le produit mixte $[u, v]$ est l'aire algébrique du parallélogramme construit sur les vecteurs u et v.
3. Pour l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$, le produit mixte $[u, v, w]$ est le volume algébrique du parallélépipède construit sur les vecteurs u, v et w.

Proposition 16

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs $u \in E$ et $v \in E$, noté $u \wedge v$, est l'unique vecteur de E tel que

$$\forall w \in E, \quad [u, v, w] = (u \wedge v \mid w)$$

Remarque 17

Si E est orienté par $\mathscr{C} = (i, j, k)$, calculons $i \wedge j$, $j \wedge k$, etc.

Proposition 18

1. Le produit vectoriel est bilinéaire et antisymétrique.
2. Le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à u et orthogonal à v.
3. On a $u \wedge v = 0_E$ si et seulement si u et v sont colinéaires.
4. $\|x \wedge y\| = \|x\|\|y\| \sin(\theta)$ où $\theta \in [0, \pi]$ est défini par : $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\| \cos(\theta)$.
5. Si (u, v) est une famille orthonormée de E, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de E.
6. On a une formule explicite pour $u \wedge v$ à l'aide des coordonnées de u et v.

Remarque 19

On peut orienter un plan ou une droite dans un espace euclidien de dimension 3 (mais on ne va pas en faire grand chose en PSI...)

2.2 Isométries du plan

Ici, E est un espace euclidien de dimension 2, orienté par une base $\mathscr{C} = (i, j)$.

Proposition 20

On a les égalités suivantes :

$$SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}, \text{ où } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}) = \{S_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}, \text{ où } S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Remarque 21

1. Les éléments de $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ sont des matrices de symétrie : ils vérifient $M^2 = \mathrm{I}_2$.
2. Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif : on a, pour θ et φ dans $\mathbb{R}$,
$$R_{\theta+\varphi} = R_\theta R_\varphi \text{ et } R_{-\theta} = R_\theta^{-1}.$$

Proposition 22 (et définition)

Soit $u \in O(E)$ une isométrie d'un plan vectoriel euclidien orienté.

1. Si u est directe, alors il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E, on a
$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
On dit que u est la **rotation d'angle** θ
2. Si u est indirecte, alors pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E, il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que
$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
u est alors la symétrie orthogonale par rapport à la droite D d'équation $y = \tan(\theta)x$ si $\theta = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, par rapport à la droite d'équation $x = 0$ si $\theta = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

Remarque 23

La forme des isométries directes permet de définir la notion d'angle entre deux vecteurs.

2.3 Isométries de l'espace

Ici, E est un espace euclidien de dimension 2, orienté par une base $\mathscr{C} = (i, j, k)$.

Proposition 24

Soit $u \in O(E)$. Alors

1. ou bien $\det(u) = 1$ et on dispose de θ dans $\mathbb{R}$, d'une BOND $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E telles que
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & R_\theta \end{pmatrix}.$$
On dit alors que u est la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(e_1)$ et d'angle θ.
2. (HP) ou bien $\det(u) = -1$ et on dispose de θ dans $\mathbb{R}$, d'une BOND $\mathscr{B}$ de E telles que
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & R_\theta \end{pmatrix}.$$

Remarque 25

Le signe de θ dépend du choix de e_1.

Point de méthode 26 (Déterminer les caractéristiques d'une isométrie directe)

Soit A une matrice de $SO_3(\mathbb{R})$: A représente une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(e_1)$ et d'angle θ.

1. pour déterminer l'axe de rotation de A, on résout $AX = X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. pour déterminer l'angle de A, on utilise la propriété précédente :
   - Déjà, $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta)$, on détermine donc facilement $\cos(\theta)$.
   - Ensuite, il faut déterminer le signe de θ ou bien de $\sin(\theta)$. Deux possibilités :
     — ou bien on prend x quelconque et non colinéaire à e_1 et on calcule $[e_1, x, Ax]$, qui doit être du signe de $\sin(\theta)$.
     — ou bien on prend $y \in e_1^\perp$. Alors $y \wedge f(y)$ est colinéaire à e_1, avec un coefficient positif si $\sin(\theta) \geqslant 0$, négatif si $\sin(\theta) \leqslant 0$.

3 Endomorphismes autoadjoints

3.1 Définitions

Ici, E est à nouveau un espace vectoriel euclidien de dimension quelconque.

Définition 27

Un endomorphisme u de E est dit autoadjoint ou symétrique si pour tous x et y de E, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$. On note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

Remarque 28

$\mathscr{S}(E)$ est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$, contenant Id_E.

Proposition 29

Soit $\mathscr{B}$ une BON de E. Un endomorphisme u de E est symétrique si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique.

Proposition 30

1. Un projecteur est autoadjoint si et seulement si c'est un projecteur orthogonal.
2. Une symétrie est autoadjointe si et seulement si c'est un projecteur orthogonal.

3.2 Réduction

Proposition 31

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$.

1. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.
2. Les sous-espaces propres de u sont orthogonaux.

Théorème 32 (Théorème spectral)

1. Tout endomorphisme autoadjoint $f \in \mathscr{S}(E)$ d'un espace euclidien E est diagonalisable dans une base orthonormée, i.e. il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit diagonale.
2. Si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle, alors il existe une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1} = PDP^\top.$$

3.3 Endomorphismes positifs, matrices positives

Définition 33

1. Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. On dit que u est **positif** (resp. **défini positif**) si pour tout x dans E, $\langle u(x), x\rangle \geqslant 0$ (resp. $\langle u(x), x\rangle > 0$). On note $\mathscr{S}^+(E)$ (resp. $\mathscr{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes positifs (resp. définis positifs).
2. Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est **positive** (resp. **définie positive**) si pour tout X dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX \geqslant 0$. On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices positives (resp. définies positives).

Proposition 34

1. Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. On a l'équivalence

$$(\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geqslant 0) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$$

ainsi que l'équivalence

$$(\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle > 0) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$$

2. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On a l'équivalence

$$\left(\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top AX \geqslant 0\right) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$$

ainsi que l'équivalence

$$\left(\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top AX > 0\right) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Remarque 35

1. Si $u \in \mathscr{S}^{++}(E)$, l'application $(x, y) \mapsto \langle u(x), y\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs est un cône : pour tous u et v autoadjoints positifs, pour tous λ et μ **positifs**, $\lambda u + \mu v$ est autoadjoint positif.

Exemple 36

1. Si $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ sont les valeurs propres de $u \in \mathscr{S}^+(E)$, encadrement de $\langle u(x), x\rangle$.
2. Existence (et unicité) d'une « racine carrée » (définie) positive d'une matrice (définie) positive.