Semaine 15 – Colle du lundi 27/01 à 8h

<table>
<tr><th>Nom</th><th>Énoncé et commentaires</th><th>Note</th></tr>
<tr><td></td><td>

Planche python. On définit pour tout p dans $\mathbb{N}$ la somme $A_p = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p\binom{2n}{n}}$.

1. Vérifier que A_p est bien définie pour tout entier naturel p.
2. **[Py]** Proposer une fonction python `A(p,N)` qui prend en argument un entier p et qui renvoie la valeur de $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p\binom{2n}{n}}$. Déterminer ainsi des valeurs approchées de A_0, A_1 et A_2. En calculant $18A_2$, conjecturer la valeur exacte de A_2.
   Tracer sur un graphe les valeurs approchées de A_p pour p variant de 0 à 49 et commenter.
3. Étudier la convergence de la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et donner, le cas échéant, sa limite.

On se propose dans la suite de cette planche de calculer les valeurs exactes de A_0, A_1 et A_2.

4. On considère la série entière
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^{2n-1}}{n^2\binom{2n}{n}} x^{2n}.$$
   Déterminer son rayon de convergence. On note S sa somme.
5. Démontrer que pour tout x dans $[-1,1]$, $S(x) = \mathrm{Arcsin}(x)^2$.
   On pourra montrer que les deux fonctions satisfont la même équation différentielle.
6. Déduire du résultat précédent les valeurs de A_2, A_1 et A_0.
   On pourra évaluer S, S' et S'' en $\frac{1}{2}$.
7. Retrouver la valeur de A_0 en calculant, pour tout n dans $\mathbb{N}$,
$$\int_0^1 t^n(1-t)^n dt.$$

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

1. **Cours.** DSE de $(1+x)^\alpha$
2. On considère la série entière $S(x) = \sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.
   (a) Déterminer le rayon de convergence de S. On le nommera R.
   (b) Étudier la série en $-R$ et en R.
   (c) Étudier la continuité de S sur $[-R,R]$.
   (d) Montrer que $(1-x)S(x)$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers 1^-. Préciser la valeur de cette limite.

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

1. **Cours.** DSE de Arctan
2. Soit f définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \frac{\mathrm{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}$.
   (a) Justifier que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.
   (b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $\left(1-x^2\right)y' - xy = 1$.
   (c) Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1,1[$.

</td><td></td></tr>
</table>