TD 12
Séries entières et variables aléatoires

Exercice 1. *Centrale PC 24*. On dispose d'une pièce donnant pile avec un probabilité $p \in]0,1[$. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pile. On note N le nombre de lancers nécessaires pour obtenir ce premier pile. On lance ensuite N fois cette pièce et on note X le nombre de pile obtenus au cours de ces N lancers.

1. Quelle est la loi de N ? Donner la loi du couple (N, X).

Correction

Par définition, N est le temps du premier succès pour une suite de variables de Bernoulli, donc N suit une loi de géométrique de paramètre p.
Ensuite, par définition, la variable X est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. Alors $\mathbb{P}(N = n, X = k) = 0$ si $k > n$ (on ne peut pas avoir k pile au cours de n lancers si $n < k$).
Enfin, si $k \leqslant n$,

$$\mathbb{P}(N = n, X = k) = \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}_{N=n}(X = k) = pq^{n-1}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \binom{n}{k}p^{k+1}q^{2n-k-1}.$$

En effet, la loi de X conditionnée à $N = n$ est une loi binomiale de paramètres (n, p).

2. En déduire la loi de X.

Correction

On en déduit, par la formule des probabilités totales, en distinguant les cas $k = 0$ et $k \neq 0$. Pour $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(N = n, X = k)\\
&= \sum_{n\geqslant k}\binom{n}{k}p^{k+1}q^{2n-k-1} \text{ ça ne marche pas si } k = 0\\
&= \sum_{n\geqslant k}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^{k+1}q^{2n-k-1}\\
&= \frac{1}{k!}p^{k+1}q^{k-1}\sum_{n\geqslant k}\frac{n!}{(n-k)!}(q^2)^{n-k}
\end{aligned}$$

Or, si on note

$$f(x) = \sum_{n\geqslant k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k},$$

alors on remarque que $f = g^{(k)}(x)$ où $g(x) = \sum_{n\geqslant 0}x^n = \frac{1}{1-x}$. Ainsi, $g^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \frac{1}{k!}p^{k+1}q^{k-1}\frac{k!}{(1-q^2)^{k+1}}\\
&= (1-q)^{k+1}q^{k-1}\frac{1}{(1-q)^{k+1}(1+q)^{k+1}}\\
&= \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}
\end{aligned}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Si $k = 0$,

$$\mathbb{P}(X = 0) = \sum_{n \geqslant 1} pq^{2n-1} = \frac{p}{q} q^2 \frac{1}{1 - q^2} = \frac{q}{1 + q}.$$

On peut vérifier qu'on a bien défini ainsi une probabilité.

3. Soit $\lambda \in]0, 1[$. Soient U, V deux variables aléatoires indépendantes telles que $U \sim \mathcal{B}(\lambda)$ et $V \sim \mathcal{G}(\lambda)$. Trouver λ tel que $UV \sim X$.

Correction

Déjà, U est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et V est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, donc UV est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Ensuite,

$$\mathbb{P}(UV = 0) = \mathbb{P}(U = 0) = 1 - \lambda.$$

Puis, pour k dans $\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(UV = k) &= \mathbb{P}(U = 1, V = k) \\ &= \mathbb{P}(U = 1)\mathbb{P}(V = k) \text{ par indépendance.} \\ &= \lambda(1 - \lambda)^{k-1}\lambda \\ &= \lambda^2(1 - \lambda)^{k-1} \end{aligned}$$

En posant λ tel que $1 - \lambda = \dfrac{q}{1 + q}$, i.e. $\lambda = \dfrac{1}{1 + q}$, alors on remarque que

$$\lambda^2(1 - \lambda)^{k-1} = \frac{1}{(1 + q)^2} \left(\frac{q}{1 + q}\right)^{k-1} = \frac{q^{k-1}}{(1 + q)^{k+1}},$$

ce qui est exactement ce que l'on recherche !

4. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Correction

On en déduit que

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V) = \lambda\frac{1}{\lambda} = 1,$$

et que

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(U^2V^2) = \mathbb{E}(UV^2) = \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V^2) = \lambda\mathbb{E}(V^2)$$

Or,

$$\mathbb{E}(V^2) = \mathbb{V}(V) + \mathbb{E}(V)^2 = \frac{1-\lambda}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2-\lambda}{\lambda^2}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \frac{2-\lambda}{\lambda} - 1\\ &= 2\frac{1-\lambda}{\lambda}\\ &= 2\frac{\frac{q}{1+q}}{\frac{1}{1+q}} = 2q.\end{aligned}$$

Exercice 2. *Mines-Télécom 24*. Soit $S(t) = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+n+1}{n!}t^n$.

1. Donner le rayon de convergence puis calculer la somme de cette série entière.

Correction

On note, pour n dans $\mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{n!}$. Alors pour $n \geqslant 2$,

$$a_n = \frac{n(n-1)+2n+1}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!},$$

ce qui, par propriété sur les sommes d'une série entière, assure que la série entière S est de rayon de convergence infini. Ainsi,

$$\begin{aligned}S(t) &= \sum_{n\geqslant 0}\frac{n(n-1)}{n!}t^n + \sum_{n\geqslant 0}\frac{2n}{n!}t^n + \sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}\\ &= (t^2+2t+1)\mathrm{e}^t\\ &= (t+1)^2\mathrm{e}^t.\end{aligned}$$

2. Trouver λ tel que $S(t)$ soit la série génératrice d'une variable aléatoire X.

Correction

Il faut que $S(1) = 1$ (pour que $\sum_{n\geqslant 0} a_n = 1$, donc que $\lambda = \dfrac{1}{4\mathrm{e}}$.

3. Donner la loi de X puis, si elles existent, son espérance et sa variance.

Correction

On a alors pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X=n)=\frac{n^2+n+1}{4e.n!},$$

puis, comme S est dérivable sur tout $\mathbb{R}$,

$$S'(t)=2(t+1)e^t+(t+1)^2e^t,$$

et donc

$$\mathbb{E}(X)=\lambda S'(1)=\frac{8e}{4e}=2$$

De même, on remarque que

$$\mathbb{E}(X^2)=\lambda\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty}n^2a_n=\lambda\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty}n(n-1)a_n+\lambda\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty}na_n=\lambda S''(1)+\lambda S'(1).$$

Ainsi, comme

$$S''(1)=2e^t+4(t+1)e^t+(t+1)^2e^t,$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X)&=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2\\&=\lambda(S''(1)+S'(1))-4\\&=\frac{14e+8e}{4e}-4\\&=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 3. *CCINP 24*.

1. Donner le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^n}$ pour $n=1$ puis pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Correction

Pour $n=1$ et $x\in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n\geqslant 0}x^n$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on utilise le développement série entière de $(1+x)^\alpha$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^n}&=(1-x)^{-n}\\&=1+\sum_{m\geqslant 1}\prod_{k=0}^{m-1}\frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-m+1)}{n!}(-1)^mx^m\\&=1+\sum_{m\geqslant 1}\prod_{k=0}^{m-1}\frac{(n+m-1)!}{(m-1)!n!}x^m\\&=\sum_{m\geqslant 0}\binom{n+m-1}{m}x^m.\end{aligned}$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $p\in]0,1[$, $q=1-p$ et, pour $k\in\mathbb{N}$, $p_k=\dbinom{n+k-1}{k}p^nq^k$. Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur $\mathbb{N}$.

Correction

On calcule

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k &= \sum_{k\geqslant 0}\binom{n+k-1}{k}p^nq^k\\ &= p^n\sum_{k\geqslant 0}\binom{n+k-1}{k}q^k\\ &= p^n\frac{1}{(1-q)^n}=1,\end{aligned}$$

donc $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit bien une probabilité sur $\mathbb{N}$.

3. Soit X une variable aléatoire vérifiant : $\forall k\in\mathbb{N}, P(X=k)=p_k$. Déterminer la fonction génératrice de X, puis calculer l'espérance et la variance de X.

Correction

Soit $t\in[-1,1]$. Alors

$$\begin{aligned}G_X(t) &= \sum_{k\geqslant 0}\binom{n+k-1}{k}p^nq^kt^k\\ &= p^n\sum_{k\geqslant 0}\binom{n+k-1}{k}(tq)^k\\ &= \left(\frac{p}{1-qt}\right)^n.\end{aligned}$$

La fonction G_X est bien dérivable en 1 et

$$G_X'(t)=p^n\times\frac{qn}{(1-qt)^{n+1}},$$

d'où

$$\mathbb{E}(X)=G_X'(1)=nqp^n\frac{1}{(1-q)^{n+1}}=\frac{nq}{p}.$$

De même, en refaisant le calcul fait en cours (à savoir refaire !),

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= G_X''(1)+G_X'(1)-G_X'(1)^2\\ &= n(n+1)q^2p^n\frac{1}{(1-q)^{n+2}}+\frac{nq}{p}-\left(\frac{nq}{p}\right)^2\\ &= n(n+1)\left(\frac{q}{p}\right)^2+n\frac{q}{p}-n^2\left(\frac{q}{p}\right)^2\\ &= n\frac{q}{p}\left(\frac{q}{p}+1\right).\end{aligned}$$

Exercice 4. *Mines 17 et exo ultra-classique*. On effectue des expériences aléatoires et indépendantes : $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, avec chaque X_i suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On note (quand elle existe...) T_n l'étape à laquelle on a eu le n-ième succès.

1. Donner la loi de T_1.

Correction

T_1 suit une loi géométrique de paramètre p : c'est du cours !

2. Déterminer la loi de T_2 puis de T_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction

Soit $m \in \mathbb{N}$. L'évènement $(T_n = m)$ est la réunion correspond à l'évènement $X_1 + \cdots + X_m = n$ et $X_m = 1$ soit encore $X_1 + \cdots + X_{m-1} = n-1$ et $X_m = 1$. Par indépendance

$$\mathrm{P}\left(T_n = m\right) = \mathrm{P}\left(X_1 + \cdots + X_{m-1} = n-1\right) \mathrm{P}\left(X_m = 1\right)$$

Puisque $X_1 + \cdots + X_{m-1} \sim \mathcal{B}(m-1, p)$ et $X_m \sim \mathcal{B}(p)$, on obtient

$$\mathrm{P}\left(T_n = m\right) = \binom{m-1}{n-1} p^n (1-p)^{m-n}.$$

3. Donner le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-t)^n}$.

Correction

Par le cours, en prenant $\alpha = -n$, on obtient

$$\frac{1}{(1-t)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m-1}{m-1} t^n \text{ pour } t \in]-1, 1[$$

4. Calculer la fonction génératrice de T_n et en déduire l'espérance de T_n.

Correction

Par définition

$$\begin{aligned} G_{T_n}(t) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m-1}{n-1} p^n (1-p)^{m-n} t^m \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m+n-1}{n-1} (pt)^n ((1-p)t)^m = \frac{(pt)^n}{(1-(1-p)t)^n} \end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{E}(X) = G'_{T_n}(1) = \frac{n}{p}.$$

Exercice 5. *Mines-Télécom 23*. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires indépendants suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. On note $X = \operatorname{card}\{i \leqslant n, X_i = 1\}$ et $Z = \operatorname{card}\{i \leqslant n, X_i = X_1\}$.

1. Préciser la loi de X, son espérance et sa variance.

Correction

La variable aléatoire X compte le nombre de succès dans une succession d'expériences de Bernoulli : elle suit donc une loi binomiale de paramètres (n, p). Donc $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

2. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

Correction

Les variables X et Z ne sont pas indépendantes :

$$\mathbb{P}(X = 0, Z = 0) = 0,$$

car si toutes les variables aléatoires valent -1, alors toutes sont égales à X_1.

3. Calculer la fonction génératrice de Z puis son espérance.

Correction

On écrit que $Z = 1 + \sum_{i=2}^{n} A_i$ où $A_i = \mathbb{1}_{X_i = X_1}$. Donc

$$\mathbb{E}(Z) = t\mathbb{E}(\prod_{i=2}^{n} t^{A_i})$$

Reste à savoir si $A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendantes. Or, on remarque que

$$\mathbb{P}(A_i = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_i = 1) + \mathbb{P}(X_1 = -1, X_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

et, si $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ sont dans $\{0, 1\}$, disons, pour simplifier les écritures, $\varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_k = 1$ et $\varepsilon_{k+1} = \cdots = \varepsilon_n = 0$,

$\mathbb{P}(A_2 = \varepsilon_2, \dots, A_n = \varepsilon_n)$

$= \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \cdots = X_k = 1, X_{k+1} = \cdots = X_n = -1) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \cdots = X_k = -1, X_{k+1} = \cdots = X_n = 1) = \frac{1}{2^{n-1}}$

et

$$\mathbb{P}(A_2 = \varepsilon_2) \times \dots \mathbb{P}(A_n = \varepsilon_n) = \frac{1}{2^{n-1}},$$

donc $(A_2, \dots, A_n)$ sont mutuellement indépendantes. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= t \prod_{i=2}^{n} \mathbb{E}(t^{A_i}) \\ &= t \left(\mathbb{E}(t^{A_2})\right)^{n-1} \\ &= t \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}(Z) = 1 + (n-1)\mathbb{E}(A_2) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

(c'est beaucoup plus simple qu'avec la fonction génératrice !)

Exercice 6. *CCINP 17, 18, 24....* Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi, admettant une variance, telles que $Z = X + Y + 1$ suive la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de X en fonction de p.

Correction

Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + 1$, donc, comme $X \sim Y$, $2\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z) - 1 = \frac{1}{p} - 1$, donc

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{1-p}{2p}.$$

Comme X et Y sont indépendantes,

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = 2\mathbb{V}(X),$$

car $X \sim Y$. Donc

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1}{2}\mathbb{V}(Z) = \frac{1}{2}\frac{q}{p^2}.$$

2. Déterminer la fonction génératrice de X. En déduire la loi de X.

Correction

Déjà, on remarque que pour tout t dans $[-1,1]$,

$$G_Z(t) = G_{X+Y+1}(t) = tG_{X+Y}(t) = tG_X(t)^2,$$

car, pour W une variable aléatoire,

$$G_{W+1}(t) = \mathbb{E}(t^{W+1}) = \mathbb{E}(t^W t) = t\mathbb{E}(t^W) = tG_W(t).$$

Mais $Z \sim \mathscr{G}(t)$ donc $G_Z(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$. Ainsi, pour tout t dans $[-1,1]$, $G_X(t)^2 = \dfrac{p}{1-qt}$, qui est bien positive.

Donc pour tout t dans $[-1,1]$, $G_X(t) = \varepsilon(t)\sqrt{\dfrac{p}{1-qt}}$, avec $\varepsilon(t) = \pm 1$. Mais G_X est continue sur $[-1,1]$ et $G_X(1) = 1$, donc, comme $\sqrt{\dfrac{p}{1-qt}}$ ne s'annule pas sur $[-1,1]$, G_X garde un signe constant (sinon, étant continue, en vertu du TVI elle s'annulerait). On conclut que

$$\forall t \in [-1,1],\ G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1-qt}}.$$

On en déduit que pour tout t dans $[-1,1]$,

$$G_X(t) = \sqrt{p}\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}q^n t^n,$$

d'où, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \sqrt{p}\binom{2n}{n}\frac{q^n}{4^n}.$$

Exercice 7. *Centrale 2016, 2023*. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Rappeler la définition de la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire.

Correction

Par définition, pour tout t dans $[-1,1]$, $G_X(t) = \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X=n)t^n$.

Dans la suite, on suppose : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Donner la valeur de $G_X(t)$.

Correction

C'est du cours, $G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(1-t)}$.

2. Montrer :

$$\forall t \geqslant 1 \forall a \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^a}$$

Correction

Déjà, il convient de dire que, pour une loi de Poisson, G_X est définie sur tout $\mathbb{R}$ et pas seulement sur $[-1,1]$. Ensuite, si $t \geqslant 1$, alors $\ln(t) \geqslant 0$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geqslant a) &= \mathbb{P}(X\ln(t) \geqslant a\ln(t)) \\
&= \mathbb{P}(\mathrm{e}^{X\ln(t)} \geqslant \mathrm{e}^{a\ln(t)}) \text{ par croissance de l'exponentielle} \\
&= \mathbb{P}(t^X \geqslant t^a) \\
&\leqslant \frac{\mathbb{E}(t^X)}{t^a} \text{ par l'inégalité de Markov, car la variable } t^X \text{ est positive} \\
&\leqslant \frac{G_X(t)}{t^a}.
\end{aligned}$$

3. En déduire : $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$

Correction

On en déduit que

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}},$$

et ce quel que soit $t \in \mathbb{R}$. En prenant $t = 2$, on obtient le résultat.

4. Comparer avec une majoration obtenue via l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Correction

Déjà, par l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{2\lambda} = \frac{1}{2},$$

ce qui n'est clairement pas idéal. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) = \mathbb{P}(X-\lambda \geqslant \lambda) &\leqslant \mathbb{P}(|X-\lambda| \geqslant \lambda)\\ &\leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda^2}\\ &\leqslant \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

Or $\left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda} \underset{\lambda\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, donc l'estimation que nous avons faite est meilleure que celle obtenue par l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff.

Exercice 8. *Navale 24*. Soit X une variable aléatoire telle que : $\forall k \geqslant 1, \mathbb{P}(X=k) = \frac{k-1}{2^k}$.

1. Vérifier que l'on définit bien ainsi une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}^*$.

Correction

On calcule

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k\geqslant 1}\frac{k}{2^k} - \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{2^k}, \text{ la séparation étant licite par convergence des deux séries}\\ &= \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

où $f(x) = \sum_{k\geqslant 0} x^k = \frac{1}{1-x}$, de rayon de convergence 1, donc, pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(X=k) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{4}} - 1 = 2-1 = 1.\end{aligned}$$

Donc on définit bien ainsi une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}^*$.

2. Déterminer la fonction génératrice de X.

Correction

Soit $t \in [-1,1]$. Alors

$$\begin{aligned}
G_X(t) &= \sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(X=k)t^k \\
&= \sum_{k\geqslant 1} k\frac{t^k}{2^k} - \sum_{k\geqslant 1}\frac{t^k}{2^k}, \text{ la séparation étant licite par convergence des deux séries} \\
&= \frac{t}{2}f'\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2}\frac{1}{1-\frac{t}{2}} \\
&= \frac{t}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{t}{2}\right)^2} - \frac{t}{2-t} \\
&= \frac{2t}{(2-t)^2} - \frac{t}{2-t} \\
&= \frac{t^2}{(2-t)^2}
\end{aligned}$$

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Correction

Déjà, X admet clairement une espérance finie et une variance finie car

$$k\frac{k-1}{2^k} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right) \text{ et } k^2\frac{k-1}{2^k} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

donc $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$ sont finis. Donc G_X est dérivable en 1 et $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$. Or,

$$G_X'(t) = \frac{2t(2-t)^2 + 2t^2(2-t)}{(2-t)^4} = \frac{2t(2-t)(2-t+t)}{(2-t)^4} = \frac{4t(2-t)}{(2-t)^4} = \frac{4t}{(2-t)^3}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(X) = G_X'(1) = 4.$$

De même, les calculs déjà faits en cours nous permettent de dire que

$$\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2.$$

Or,

$$\begin{aligned}
G_X''(t) &= \frac{4(2-t)^3 + 12t(2-t)^2}{(2-t)^6} \\
&= \frac{4(2-t)^2(2-t+3)}{(2-t)^6} = \frac{4(5-t)}{(2-t)^4}
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{V}(X) = 16 + 4 - 16 = 4.$$

Exercice 9. *X PC 23.*

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) \leqslant e^{\frac{x^2}{2}}$.

Correction

C'est une question vraiment très difficile si on ne pense pas aux séries entières ! Mais avec les séries entières, cela se fait parfaitement. On écrit que

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{p \geqslant 0} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \text{ et } e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^{2n}}{2^n n!}.$$

Ensuite on remarque que

$$(2p)! = (2p) \times \cdots \times (p+1) \times p! \geqslant 2 \times 2 \times p! = 2^p p!$$

Donc

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{p \geqslant 0} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \leqslant \sum_{p \geqslant 0} \frac{x^{2p}}{2^p p!} = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

2. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda) \leqslant e^{-\frac{\lambda^2}{2n}}$.

Correction

On écrit que, pour $t > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda) &= \mathbb{P}(e^{tS_n} \geqslant e^{t\lambda}) \\
&\leqslant \frac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{t\lambda}} \\
&\leqslant \frac{\prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{tX_n})}{e^{t\lambda}} \text{ par indépendance.} \\
&\leqslant \frac{\operatorname{ch}(t)^n}{e^{t\lambda}} \\
&\leqslant e^{\frac{nt^2}{2} - t\lambda},
\end{aligned}$$

d'où le résultat en prenant $t = \dfrac{\lambda}{2n}$.

Exercice 10. *Centrale 24*. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 dans lesquelles sont répartis $2n$ jetons numérotés de 1 à $2n$. L'urne U_1 contient initialement r jetons ($0 \leqslant r \leqslant n$). On tire au hasard un numéro de jeton : s'il est dans U_1 on le place dans U_2 et inversement. On note X_p la variable aléatoire donnant le nombre de jetons contenu dans U_1 après p tirages.

1. Réaliser une fonction `jeu(n,r,p)` qui renvoie X_p.

Correction

On propose la fonction suivante

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def jeu(n,r,p):
    U1 = list(range(1,r+1))
    U2 = list(range(r+1,2*n+1))
    for i in range(p):
```

```
        x = rd.randint(1,2*n+1)
        if x in U1:
            U1.remove(x)
            U2.append(x)
        else:
            U2.remove(x)
            U1.append(x)
    return len(U1)
```

2. Pour $n = 9$ et $r = 4$, donner une estimation de l'espérance de X_p pour $p \in [\![100, 200]\!]$.

Correction

On propose la fonction suivante

```
def estim(n,r,p,N):
    res = 0
    for _ in range(N):
        res += jeu(n,r,p)
    return res/N
```

On remarque que

```
>>> estim(9,4,100,1000)
9.208

>>> estim(9,4,200,1000)
8.902
```

On a l'impression d'une convergence de $\mathbb{E}(X_p)$ vers n quand p tend vers $+\infty$.

3. Tracer, pour différentes valeurs de n et r, l'espérance de X_p en fonction de p pour $p \in [\![0, 4n]\!]$. Que peut-on conjecturer ?

Correction

On teste

```
n=9
r=3
N = 1000
X = list(range(1,4*n))
Y = [estim(n,r,p,N) for p in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

Quelles que soient les valeurs testées, on a un joli graphe qui semble dire qu'il va y avoir convergence vers n, **quelle que soit la valeur de r.**

4. Déterminer l'espérance de X_1.

Correction

Les valeurs possibles prises par X_1 sont $r+1$ (si on a tiré une boule dans U_2) et $r-1$ (si on a tiré une boule dans U_1). Ainsi,

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{r}{2n}(r-1) + \frac{2n-r}{2n}(r+1) = \frac{r^2 - r + 2nr + 2n - r^2 - r}{2n} = (1+r) - \frac{r}{n}.$$

5. Pour $k \in [\![1, 2n-1]\!]$, montrer que : $\mathbb{P}(X_{p+1} = k) = \frac{2n-k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k-1) + \frac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k+1)$. Que peut-on dire pour $k = 0$ et $k = 2n$?

Correction

Soit $k \in [\![1, 2n-1]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{p+1} = k) &= \sum_{i=0}^{2n} \mathbb{P}(X_{p+1} = k, X_p = i) \\ &= \mathbb{P}(X_{p+1} = k, X_p = k-1) + \mathbb{P}(X_{p+1} = k, X_p = k+1)\end{aligned}$$

car pour que $X_{p+1} = k$, il faut qu'il y ait $k-1$ ou $k+1$ boules dans l'urne 1. Mais alors,

$$\mathbb{P}_{X_p = k-1}(X_{p+1} = k) = \frac{2n-(k-1)}{2n},$$

car pour que $X_{p+1} = k$ en sachant que $X_p = k-1$, il faut avoir tiré une boule de l'autre urne. De même,

$$\mathbb{P}_{X_p = k+1}(X_{p+1} = k) = \frac{k+1}{2n},$$

d'où, par la définition d'une probabilité conditionnelle,

$$\mathbb{P}(X_{p+1} = k) = \frac{2n-k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k-1) + \frac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k+1).$$

En revanche,

$$\mathbb{P}(X_{p+1} = 0) = \mathbb{P}_{X_p = 1}(X_{p+1} = 0)\mathbb{P}(X_p = 1) = \frac{1}{2n}\mathbb{P}(X_p = 1)$$

et

$$\mathbb{P}(X_{p+1} = 2n) = \mathbb{P}_{X_p = 2n-1}(X_{p+1} = 2n)\mathbb{P}(X_p = 2n-1) = \frac{1}{2n}\mathbb{P}(X_p = 2n-1).$$

6. Montrer que : $G_{X_{p+1}}(s) = sG_{X_p}(s) + \frac{1-s^2}{2n}G'_{X_p}(s)$.

Correction

Soit $t \in [-1, 1]$. Alors

$$\begin{aligned}
G_{X_{p+1}}(t) &= \mathbb{P}(X_{p+1} = 0) + \sum_{k=1}^{2n-1} \mathbb{P}(X_{p+1} = k)t^k + \mathbb{P}(X_{p+1} = 2n)t^{2n} \\
&= \frac{1}{2n}\mathbb{P}(X_p = 1) + \sum_{k=1}^{2n-1} \left(\frac{2n-k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k-1) + \frac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k+1) \right) t^k + \frac{1}{2n}\mathbb{P}(X_p = 2n-1)t^{2n} \\
&= \frac{1}{2n}\mathbb{P}(X_p = 1) + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{2n-k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k-1)t^k + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k+1)t^k + \frac{1}{2n}\mathbb{P}(X_p = 2n-1)t^{2n} \\
&= \frac{1}{2n}\mathbb{P}(X_p = 1) + \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{2n-k}{2n}\mathbb{P}(X_p = k)t^{k+1} + \sum_{k=2}^{2n} \frac{k}{2n}\mathbb{P}(X_p = k)t^{k-1} + \frac{1}{2n}\mathbb{P}(X_p = 2n-1)t^{2n} \\
&= \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{2n-k}{2n}\mathbb{P}(X_p = k)t^{k+1} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{2n}\mathbb{P}(X_p = k)t^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \frac{2n-k}{2n}\mathbb{P}(X_p = k)t^{k+1} + \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{2n}\mathbb{P}(X_p = k)t^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}(X_p = k)t^{k+1} + \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n} k\mathbb{P}(X_p = k)(t^{k+1} - t^{k-1}) \\
&= tG_{X_p}(t) + \frac{1}{2n}(t^2-1)\sum_{k=1}^{2n} k\mathbb{P}(X_p = k)t^{k-1} \\
&= tG_{X_p}(t) + \frac{1-t^2}{2n}G'_{X_p}(t).
\end{aligned}$$

7. Calculer l'espérance de X_p et prouver la conjecture établie en 3).

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

On admet que X_p admet une espérance et une variance, c'est-à-dire que G_{X_p} est deux fois dérivable sur $[-1, 1]$. On a alors, pour t dans $[-1, 1]$,

$$G'_{X_{p+1}}(t) = G_{X_p}(t) + tG'_{X_p}(t) - \frac{t}{n}G'_{X_p}(t) + \frac{1-t^2}{2n}G''_{X_p}(t),$$

donc, en évaluant en 1,

$$\mathbb{E}(X_{p+1}) = 1 + \mathbb{E}(X_p) - \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_p) = 1 + \frac{n-1}{n}\mathbb{E}(X_p).$$

On a donc, si on note $u_p = \mathbb{E}(X_p)$, u_p qui est une suite arithmético-géométrique, de relation de récurrence

$$u_{p+1} = 1 + \frac{n-1}{n}u_p,$$

de point fixe $\omega = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\omega$, i.e. $\omega = n$. On a alors, pour tout p dans $\mathbb{N}$,

$$u_p - \omega = \left(\frac{n-1}{n}\right)^p (u_0 - \omega) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $u_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} n$.