PSI - DS06 - Sujet B

EXERCICE

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^n \cos(tx)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Étudier la parité des fonctions I_n .

2. Prouver que les fonctions I_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que, pour tout réel x et tout entier naturel n, $I_n'(x) = -\dfrac{x}{2(n+1)} I_{n+1}(x)$.

4. Prouver par récurrence sur l'entier naturel k, que la fonction I_n est, pour tout entier naturel n, de classe C^k sur $\mathbb{R}$.

Soit n un entier naturel fixé.

5. Calcul de $I_n(0)$

5.1. Déterminer, pour tout entier naturel p, une relation entre $I_{p+1}(0)$ et $I_p(0)$.

5.2. En déduire l'expression de $I_n(0)$ à l'aide de factorielles.

6. Calculer la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,k\,!\,(n-k)\,!}$.

Le résultat sera exprimé à l'aide de factorielles.

7. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 et son domaine de validité de la fonction $u \mapsto \cos(u)$.

8. Montrer que la fonction I_n est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le domaine de validité de ce développement.

Chaque coefficient sera donné sous forme d'une intégrale et on citera avec précision les théorèmes utilisés.

9. Quel résultat démontré antérieurement retrouve-t-on alors pour la fonction I_n ?

PROBLÈME 1
Étude d'une famille de séries entières

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel. On note $\mathcal{D}_\alpha$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

Objectifs

Ce problème est composé de trois **parties** indépendantes.

Dans la **Partie I**, on étudie quelques propriétés élémentaires des fonctions f_α.

L'objectif de la **Partie II** est de construire un logarithme complexe.

Enfin, la **Partie III** permet d'obtenir un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 1, dans le cas $\alpha \in]0, 1[$.

Partie I - Quelques propriétés des fonctions f_α

10. Déterminer le rayon de convergence R commun aux séries entières définissant les fonctions f_α.

11. Déterminer, suivant les valeurs du réel α, le domaine de définition $\mathcal{D}_\alpha$ de la fonction f_α. *On distinguera les cas $\alpha \in]-\infty, 0]$, $\alpha \in]0, 1]$ et $\alpha \in]1, +\infty[$.*

12. On suppose dans cette question $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.

13. Expliciter f_0, f_{-1} et f_1.

14. Soit $\alpha > 1$. Prouver que f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha$.

15. Soit $\alpha \leq 1$. Prouver que $\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. *On pourra comparer f_α à f_1.*

Remarque : les questions 16 et 17 sont complètement indépendantes du reste du sujet !

On suppose dans les deux prochaines questions qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ et une variable aléatoire X_α, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbf{N}^*$, tels que la fonction génératrice G_α de X_α soit :

$$G_\alpha = \lambda f_\alpha.$$

16. Montrer que $\alpha > 1$ et $\lambda = \frac{1}{f_\alpha(1)}$.

17. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la variable aléatoire X_α admette une espérance.
Déterminer cette espérance en fonction de $f_\alpha(1)$ et $f_{\alpha-1}(1)$ seulement.

Partie II - Un logarithme complexe

18. Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1,1[$ associe $\ln(1+x)$.

Pour tout nombre complexe z, tel que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note : $S(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}$.

19. Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S. Pour tout x réel élément de $]-R,R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable *réelle* t suivante :

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme.

On a donc, pour $t \in \mathbf{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$.

20. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.

21. Prouver que g est définie et de classe C^∞ sur $[0,1]$. Déterminer, pour tout $t \in [0,1]$, $g'(t)$.

22. On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0,1]$:

$$h'(t) = \frac{z_0}{1+tz_0} h(t).$$

23. Résoudre l'équation différentielle de la question précédente et en déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$

Partie III - Un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1, dans le cas où $\alpha \in]0,1[$

Dans toute cette partie, on suppose que $\alpha \in]0,1[$. L'objectif est de donner un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

Pour tout $x \in]0,1[$, on considère l'intégrale : $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.

24. Justifier que, pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $I(x)$ est convergente.

25. On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $\forall s \in \mathbf{R}_+^*, \Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.
Pour tout $x \in]0,1[$, déterminer une expression de $I(x)$ faisant intervenir $\ln(x)$, α et $\Gamma(1-\alpha)$.

26. Prouver que, pour tout $x \in]0,1[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{t^\alpha}$ définie pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

27. En déduire, pour tout $x \in]0,1[$, l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leq f_\alpha(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

28. En déduire un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.