Mathématiques, DS 06A : Mines PC-PSI 2022
Corrigé

A. Fonctions L et P

1. On sait que $\left|\dfrac{z^n}{n}\right| \leqslant |z|^n$, terme général d'une série convergente. Donc, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ converge absolument par comparaison, donc converge.
Lorsque $z \in]-1,1[$,

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z).}$$

2. On écrit que

$$\Phi(t) = \sum_{n\geqslant 1} \varphi_n(t),$$

où, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\varphi_n(t) = \dfrac{z^n t^n}{n}$. On note a un réel tel que $|z| < a < 1$. Alors

- pour tout $t \in \left]-\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{a}\right[$,

$$|\varphi_n(t)| \leqslant \frac{|z|^n}{a^n n} \leqslant \left(\frac{|z|}{a}\right)^n,$$

  terme général d'une série géométrique convergente, donc la série de fonctions $\sum \varphi_n$ converge simplement,
- pour tout n dans $\mathbb{N}$, φ_n est dérivable et

$$\varphi_n'(t) = t^{n-1} z^n.$$

- pour tout $t \in \left]-\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{a}\right[$,

$$|\varphi_n'(t)| \leqslant \frac{|z|^n}{a^{n-1}},$$

  majorant indépendant de t, donc φ_n est bornée sur $]-a,a[$ et

$$\boxed{\|\varphi_n\|_\infty \leqslant a\left(\frac{|z|}{a}\right)^n,}$$

  terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série de fonctions $\sum \varphi_n$ converge normalement, donc uniformément.

Donc, par le théorème de dérivation des séries de fonctions, $\boxed{\Phi \text{ est dérivable sur } \left]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right[,}$ qui est bien un intervalle ouvert incluant $[-1,1]$; de plus,

$$\boxed{\forall t \in [-1,1],\ \Phi'(t) = \sum_{n\geqslant 1} z^n t^{n-1} = \frac{z}{1-tz}.}$$

3. Déjà, Ψ est dérivable sur $[0,1]$ et, pour tout t dans $[0,1]$,

$$\Psi'(t) = -z\mathrm{e}^{L(tz)} + (1-tz)\frac{z}{1-tz}\mathrm{e}^{L(tz)} = 0.$$

Ainsi, Ψ est constante sur $[0,1]$, égale à $\Psi(0) = \mathrm{e}^{L(0)} = 1$. On en déduit donc que pour tout t dans $[0,1]$, $\Psi(t) = 1$, donc

$$\boxed{\mathrm{e}^{L(tz)} = \frac{1}{1-tz}.}$$

Le résultat désiré s'ensuit en prenant $t = 1$.

4. Soit $z \in D$. Alors

$$\boxed{|L(z)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n} = -\ln(1-|z|).}$$

On en déduit alors que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\boxed{|L(z^n)| \leqslant -\ln(1-|z|^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^n,}$$

car $|z|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi par comparaison de séries à termes positifs, comme la série géométrique $\sum |z|^n$ converge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} L(z^n)$ converge pour tout z dans D.

5. Déjà, l'exponentielle ne s'annule jamais sur $\mathbb{C}$ donc $P(z) \neq 0$. Ensuite,

$$\begin{aligned} P(z) &= \lim_{N\to+\infty} \exp\left(\sum_{n=1}^{N} L(z^n)\right) \quad \text{par continuité de l'exponentielle sur } \mathbb{C}. \\ &= \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \exp(L(z^n)) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}. \end{aligned}$$

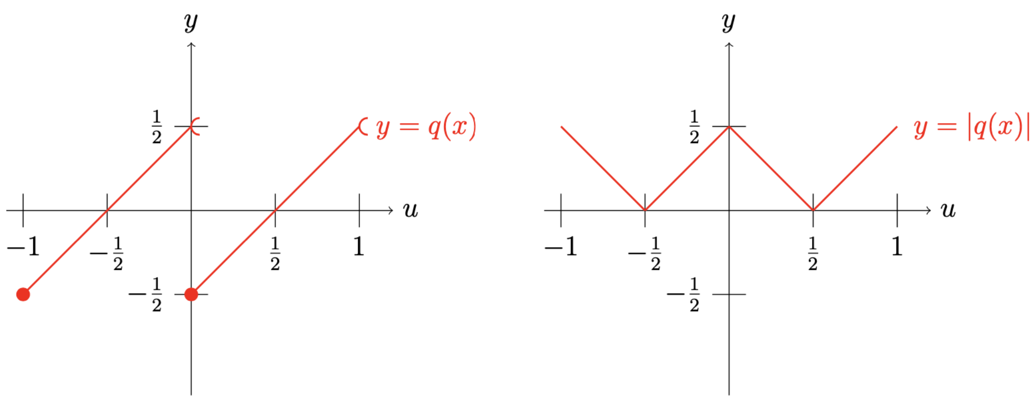
Soit désormais t un réel strictement positif. Alors $\mathrm{e}^{-t} \in]0,1[$ et pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-(\mathrm{e}^{-t})^n}\right) \boxed{= \sum_{n=1}^{N} -\ln(1-\mathrm{e}^{-nt})}$$

Le résultat s'ensuit par continuité de ln et convergence de la série de droite.

B. Développement asymptotique en variable réelle

6. *C'est dommage de ne pas vous avoir fait dessiner de graphe ! On a le dessin suivant (qui n'est pas de moi, merci au corrigé de Bruno Winckler)*



La fonction partie entière étant continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\text{la fonction } q \text{ l'est aussi.}}$ Ensuite, si $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$: en effet,

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \text{ donc } \lfloor x \rfloor + 1 \leqslant x + 1 < (\lfloor x \rfloor + 1) + 1,$$

et cette inégalité caractérise la partie entière. On en déduit que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\boxed{q(x+1) = x + 1 - \lfloor x+1 \rfloor - \frac{1}{2} = x + 1 - (\lfloor x \rfloor + 1) - \frac{1}{2} = q(x),}$$

donc q est 1-périodique.
Enfin, grâce à la 1-périodicité, on montre que pour tout x dans $[0,1]$, $|q(-x)| = |q(x)|$. Soit x dans $]0,1[$. Alors, par 1-périodicité,

$$\boxed{q(-x) = q(1-x) = (1-x) - \lfloor 1-x \rfloor - \frac{1}{2} = 1 - x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - x = -q(x)}$$

De plus, $q(-1) = -\frac{1}{2} = q(1)$, donc pour tout x dans $[0,1]$, $|q(-x)| = |q(x)|$, d'où la parité de $|q|$ sur $\mathbb{R}$.

7. Soit $t > 0$. Notons $g(u) = \dfrac{q(u)}{\mathrm{e}^{tu} - 1}$. Alors

- la fonction g est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$ (car $tu \neq 0$ pour $u \geqslant 1$).
- on a, pour tout u, $0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor \leqslant 1$, donc

$$\boxed{-\frac{1}{2} \leqslant q(u) \leqslant \frac{1}{2}}$$

  On en déduit donc que

$$\left| \frac{q(u)}{\mathrm{e}^{tu} - 1} \right| \leqslant \frac{1}{2(\mathrm{e}^{tu} - 1)} \underset{u \to +\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-tu}}{2},$$

  fonction intégrable en $+\infty$,

$\boxed{\text{donc l'intégrale est bien définie.}}$

8. Soit $n > 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_1^n \frac{q(u)}{u} du &= \int_1^n \frac{u - \lfloor u \rfloor - \frac{1}{2}}{u} du \\
&= n - 1 - \int_1^n \frac{\lfloor u \rfloor}{u} du - \frac{1}{2}\ln(n) \\
&= n - 1 - \frac{1}{2}\ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\lfloor u \rfloor}{u} du \\
&= n - 1 - \frac{1}{2}\ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{k}{u} du \\
&= n - 1 - \frac{1}{2}\ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} (k\ln(k+1) - k\ln(k)) \\
&= n - 1 - \frac{1}{2}\ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} ((k+1-1)\ln(k+1) - k\ln(k)) \\
&= n - 1 - \frac{1}{2}\ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) \\
&= n - 1 - \frac{1}{2}\ln(n) - n\ln(n) + \ln(n!) \\
&= \ln(\mathrm{e}^{n-1}) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(\frac{1}{n^n}\right) + \ln(n!) - 1 \\
&\boxed{= \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) - 1.}
\end{aligned}$$

9. On remarque que, par décroissance de la fonction inverse,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\lfloor x \rfloor}^x \frac{q(u)}{u} du\right| &\leqslant \int_{\lfloor x \rfloor}^x \frac{|q(u)|}{u} du \\
&\leqslant \int_{\lfloor x \rfloor}^x \frac{1}{2\lfloor x \rfloor} \\
&\leqslant \frac{x - \lfloor x \rfloor}{2\lfloor x \rfloor} \\
&\boxed{\leqslant \frac{1}{2\lfloor x \rfloor} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,}
\end{aligned}$$

donc, par encadrement, $\boxed{\int_{\lfloor x \rfloor}^x \frac{q(u)}{u} du \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

Ensuite, si $x > 1$, alors on note $n_x = \lfloor x \rfloor$ et $f(x) = f(x) = \int_{\lfloor x \rfloor}^x \frac{q(u)}{u} du$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{q(u)}{u} du &= \int_1^{n_x} \frac{q(u)}{u} du + f(x) \\
&= \ln\left(\frac{n_x! e^{n_x}}{n_x^{n_x}\sqrt{n_x}}\right) - 1 + f(x).
\end{aligned}$$

mais, par l'équivalent de Stirling,

$$\frac{n_x! e^{n_x}}{n_x^{n_x}\sqrt{n_x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n_x}\left(\frac{n_x}{\mathrm{e}}\right)^{n_x} \frac{e^{n_x}}{n_x^{n_x}\sqrt{n_x}} \boxed{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}}.$$

On en déduit que

$$\int_1^x \frac{q(u)}{u}du \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(\sqrt{2\pi}) - 1 + 0 = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

10. Si $u > 0$, $e^{-u} \in [0, 1[$, donc

$$\ln(1 - e^{-u}) = -\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-nu}}{n}$$

On note, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $\varphi_n(u) = -\dfrac{e^{-nu}}{n}$. On va appliquer un théorème d'intégration terme à terme :

- pour tout $u > 0$, la série de fonctions $\sum \varphi_n$ converge simplement,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n est continue par morceaux, intégrable sur $[0, +\infty[$,
- si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |\varphi_n(u)|du &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nu}}{n}du \\ &= \frac{1}{n^2},\end{aligned}$$

  qui est le terme général d'une série convergente.

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme, on en déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t})dt &= \sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty} \varphi_n(u)du \\ &= \sum_{n\geqslant 1} -\frac{1}{n^2} \\ &\boxed{= -\frac{\pi^2}{6}.}\end{aligned}$$

11. Commençons par l'indication : sait que pour tout x dans $\mathbb{R}^*$,

$$h(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} = -\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n x^n}{n!x} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!}$$

Cette série entière, de rayon de convergence égal à $+\infty$, est dérivable, de dérivée

$$h'(x) = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}.$$

Or, pour $x > 0$,

$$\frac{\frac{n+1}{(n+2)!}x^n}{\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}} = \frac{(n+1)x}{n(n+2)} < 1$$

donc la suite $\left(\dfrac{n}{(n+1)!}x^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante, tend vers 0, donc la série définissant $h'(x)$ pour $x > 0$ est une série alternée. Ceci assure que h' est du signe de $(-1)^1\dfrac{1}{(1+1)!}x^{1-1}$, c'est-à-dire négative. $\boxed{\text{D'où la décroissance de } h.}$
Ensuite, on écrit que

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1 - e^{-tu}}{t}\right) du = \int_0^1 \ln\left(\frac{1 - e^{-tu}}{tu}\right) du + \int_0^1 \ln(u)du.$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \ln(u)du = -1$, il suffit de démontrer que l'autre intégrale tend vers 0. Or, comme pour $t \in]0,1]$, $0 \leqslant tu \leqslant t$

$$\boxed{\ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\right) \leqslant \int_0^1 \ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-tu}}{tu}\right) du \leqslant 0,}$$

la dernière inégalité venant du fait que $h(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et que h décroît, donc $\ln(h(tu)) \leqslant 0$ pour tous t, u dans $[0,1]^2$. Mais $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc le membre de gauche tend aussi vers 0, d'où la convergence de l'intégrale vers 0.
On en déduit donc que

$$\boxed{\int_0^1 \ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-tu}}{t}\right) du \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -1.}$$

12. Il s'agit d'appliquer un théorème de continuité des intégrales à paramètre. On fixe k dans $\mathbb{N}^*$. On pose

$$g(t,u) = \begin{cases} \dfrac{tq(u)}{\mathrm{e}^{tu}-1} \text{ si } t \neq 0 \\ \dfrac{q(u)}{u} \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors

- pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, $u \mapsto g(t,u)$ est continue par morceaux sur $\left[\dfrac{k}{2}, \dfrac{k+1}{2}\right]$.
- pour tout u dans $\left[\dfrac{k}{2}, \dfrac{k+1}{2}\right]$m $t \mapsto g(t,u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, car $\dfrac{tq(u)}{\mathrm{e}^{tu}-1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{q(u)}{u}$.
- soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $u \in \left[\dfrac{k}{2}, \dfrac{k+1}{2}\right]$. Alors comme $\mathrm{e}^{tu} \geqslant 1 + tu$ (propriété du cours de première année),

$$\left|\frac{tq(u)}{\mathrm{e}^{tu}-1}\right| \leqslant \frac{t|q(u)|}{tu} = \frac{q(u)}{u},$$

  fonction indépendante de t et intégrable sur $\left[\dfrac{k}{2}, \dfrac{k+1}{2}\right]$.

Donc, par le théorème de continuité des intégrales à paramètre, on en déduit que u_k est continue sur $\mathbb{R}_+$.

13. Soit $u \in \left[\dfrac{k}{2}, \dfrac{k+1}{2}\right]$. Alors, déjà, $\dfrac{t}{\mathrm{e}^{tu}-1} \geqslant 0$ car $\mathrm{e}^{tu} \geqslant 1$. Ensuite,

- si k est pair, disons $k = 2p$, alors $u \in \left[p, p + \dfrac{1}{2}\right]$ et

$$q(u) = u - \lfloor u \rfloor - \frac{1}{2} = u - 2p - \frac{1}{2} \leqslant 0,$$

  car $u \leqslant 2p + \dfrac{1}{2}$.

- si k est impair, disons $k = 2p+1$, alors $u \in \left[p + \dfrac{1}{2}, p+1\right]$ et

$$q(u) = u - 2p - \frac{1}{2} \geqslant 0.$$

Ainsi, $\boxed{q \text{ est de signe constant sur } \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right].}$ On en déduit donc que

$$|u_k(t)| = \left|\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u\right| = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u.$$

Puis, plus précisément, on a dit que si k était pair, $u_k(t)$ était négatif et si k est impair, $u_k(t)$ était positif, d'où

$$\boxed{u_k(t) = (-1)^{k+1}|u_k(t)|.}$$

Enfin, il faut démontrer que la série $\sum u_k(t)$ est une série alternée. On note $a_k = \displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}du$.
Alors,

- $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est positive,
- on montre la décroissance de a_k. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, si k est pair, $k = 2p$,

$$\begin{aligned} a_k &= \int_p^{p+\frac{1}{2}} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}du \\ &=_{s=u-p} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t|q(s+p)|}{e^{t(s+p)}-1}ds \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t|q(s)|}{e^{t(s+p)}-1}ds \text{ par 1-périodicité de } |q| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \int_{p+\frac{1}{2}}^{p+1} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}du \\ &=_{s=u-p-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{t|q(s+p+1)|}{e^{t(s+p+1)}-1}ds \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{t|q(s)|}{e^{t(s+p+1)}-1}ds \text{ par 1-périodicité de } |q| \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t|q(v)|}{e^{t(-v+p+1)-1}}dv \text{ en posant } v = -s \end{aligned}$$

Or, pour $v \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $p+1-v > p+v$, donc $\boxed{a_{k+1} \leqslant a_k.}$
On fait de même si k est impair (en fait, la disjonction n'était pas forcément utile, d'où la décroissance.

- enfin, on a

$$\begin{aligned} |a_k| &\leqslant \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{1}{2u}du \text{ par la majoration déjà faite dans la question 12} \\ &\leqslant \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

(on rappelle que $|q(u)| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout u.)

Donc, par le critère des séries alternées, on en déduit que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| &\leqslant |u_n(t)| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

14. On sait que

- la série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$,
- la convergence est en fait uniforme, par convergence uniforme des restes démontrée à la question 13,
- pour tout k dans $\mathbb{N}$, $u_k(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{q(u)}{u} du$

Donc, par théorème de la double limite,

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1} &= \sum_{k\geqslant 2} u_k(t) \\ &\underset{t\to 0}{\longrightarrow} \boxed{\sum_{k\geqslant 2}\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{q(u)}{u} du = \int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} du = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1,}\end{aligned}$$

d'après la question 9.

15. Soit $t > 0$. Alors

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1} du &= \int_1^{+\infty} \frac{t\left(u - \lfloor u \rfloor - \frac{1}{2}\right)}{e^{tu}-1} du \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1} du - \int_1^{+\infty} \frac{t\lfloor u \rfloor}{e^{tu}-1} du - \frac{t}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{tu}-1} du\end{aligned}$$

La troisième intégrale se calcule directement :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^{tu}-1} du &= \int_1^{+\infty} \frac{te^{-tu}}{1-e^{-tu}} du \\ &= \left[\ln(1-e^{-tu})\right]_1^{+\infty} \qquad = -\ln(1-e^{-t})\end{aligned}$$

Dans la première intégrale, on effectue une intégration par parties, en dérivant u et en intégrant $u \mapsto \dfrac{t}{e^{tu}-1}$ en $\ln(1-e^{-tu})$. On obtient

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1} du &= \left[u\ln(1-e^{-tu})\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \ln(1-e^{-tu}) du \\ &= -\ln(1-e^{-t}) - \int_1^{+\infty} \ln(1-e^{-tu}) du.\end{aligned}$$

Enfin, la seconde intégrale se calcule par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{t\lfloor u\rfloor}{1-\mathrm{e}^{-tu}}du &= \sum_{k=1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{tk}{1-\mathrm{e}^{tu}}du\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k\left[\ln(1-\mathrm{e}^{-tu})\right]_k^{k+1}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\ln(1-\mathrm{e}^{-t(k+1)})-\ln(1-\mathrm{e}^{-tk})\right)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)\ln(1-\mathrm{e}^{-t(k+1)})-k\ln(1-\mathrm{e}^{-tk})-\sum_{k=1}^{+\infty}\ln(1-\mathrm{e}^{-t(k+1)})\\
&= -\ln(1+\mathrm{e}^{-t})-\sum_{k=1}^{+\infty}\ln(1-\mathrm{e}^{-t(k+1)}) \text{ par télescopage}\\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty}\ln(1-\mathrm{e}^{-tk})\\
&\boxed{= \ln\left(P(\mathrm{e}^{-t})\right).}
\end{aligned}$$

Ainsi, en rassemblant tout,

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty}\frac{tq(u)}{\mathrm{e}^{tu}-1} &= -\ln(1-\mathrm{e}^{-t})-\int_1^{+\infty}\ln(1-\mathrm{e}^{-tu})du-\ln(P(\mathrm{e}^{-t})-\frac{1}{2}\left(-\ln(1-\mathrm{e}^{-t})\right)\\
&\boxed{= -\frac{1}{2}\ln(1-\mathrm{e}^{-t})-\ln\left(P(\mathrm{e}^{-t})\right)-\int_1^{+\infty}\ln(1-\mathrm{e}^{-tu})du}
\end{aligned}$$

16. On sait alors que

$$\ln(P(\mathrm{e}^{-t})) = -\int_1^{+\infty}\frac{tq(u)}{\mathrm{e}^{tu}-1}-\frac{1}{2}\ln(1-\mathrm{e}^{-t})-\int_1^{+\infty}\ln(1-\mathrm{e}^{-tu})du$$

Or,

- $-\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{tq(u)}{\mathrm{e}^{tu}-1}\underset{t\to 0}{\longrightarrow}-\frac{\ln(2\pi)}{2}+1$, donc

$$\boxed{-\int_1^{+\infty}\frac{tq(u)}{\mathrm{e}^{tu}-1}\underset{t\to 0}{=}-\frac{\ln(2\pi)}{2}+1+o(1)}$$

- ensuite,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\ln(1-\mathrm{e}^{-t}) &\underset{t\to 0}{=} -\frac{1}{2}\ln(1-1+t+o(t))\\
&\underset{t\to 0}{=} -\frac{1}{2}\left(\ln(t)+\ln(1+o(1))\right)\\
&\boxed{\underset{t\to 0}{=} -\frac{\ln(t)}{2}+o(1).}
\end{aligned}$$

- pour étudier $\displaystyle\int_1^{+\infty}\ln(1-\mathrm{e}^{-tu})$, on écrit que

$$\int_1^{+\infty}\ln(1-\mathrm{e}^{-tu})du = \int_0^{+\infty}\ln(1-\mathrm{e}^{-tu})du-\int_0^1\ln(1-\mathrm{e}^{-tu})du.$$

Ensuite, on dit que

$$\int_0^{+\infty} \ln(1-\mathrm{e}^{-tu})du =_{s=tu} \int_0^{+\infty} \ln(1-\mathrm{e}^{-s})\frac{ds}{t}$$
$$\boxed{= -\frac{\pi^2}{6t}}$$

puis que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1-\mathrm{e}^{-tu})du &= \ln(t) + \int_0^1 \ln(1-\mathrm{e}^{-tu}) - \ln(t)du \\ &= \ln(t) + \int_0^1 \ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-tu}}{t}\right)du \\ &\boxed{\underset{t\to 0}{=} \ln(t) - 1 + o(1)}\end{aligned}$$

Donc

$$-\int_1^{+\infty} \ln(1-\mathrm{e}^{-tu})du \boxed{\underset{t\to 0}{=} \frac{\pi^2}{6t} - \ln(t) + 1 + o(1)}$$

En rassemblant les trois termes encadrés, on a exactement le résultat désiré :

$$\boxed{\ln(P(\mathrm{e}^{-t})) \underset{t\to 0}{=} \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1)}$$

C. Développement de P en série entière

17. Déjà, si $(a_1,\dots,a_N)$ est un N-uplet tel que $\sum_{k=1}^{N} ka_k = n$, alors pour tout k, $0 \leqslant a_k \leqslant \frac{n}{k} \leqslant n$, donc $a_k \in [\![0,n]\!]$, ce qui assure que $\boxed{(a_1,\dots,a_N) \in [\![0,n]\!]^N.}$

Ensuite, on remarque que $\boxed{(n,0,\dots,0) \text{ appartient toujours à } P_{n,N}.}$

De plus, si $(a_1,\dots,a_N) \in P_{n,N}$, alors $(a_1,\dots,a_N,0) \in P_{n,N+1}$: ainsi, $P_{n,N+1}$ contient au moins tous les $(a_1,\dots,a_N,0)$ avec $(a_1,\dots,a_N) \in P_{n,N}$, donc

$$\boxed{p_{n,N+1} \geqslant p_{n,N}}$$

Enfin, si $n>0$, pour $N>n$, on remarque que $n+1, n+2, \dots, N$ **ne peuvent pas être utilisés pour décomposer n.** Ainsi, pour $K>n$, les éléments de $P_{n,K}$ sont de la forme

$$\boxed{(a_1,\dots,a_n,0,\dots,0)},$$

donc tous les éléments de $P_{n,K}$ seront obtenus en rajoutant des zéros aux éléments de $P_{n,n}$, donc $(p_{n,N})_{N\geqslant 1}$ est constante à partir du rang n.
(le cas $n=0$ est à part mais osef)

18. On sait que

$$\frac{1}{1-z^N} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{kN} = \sum_{n\geqslant 0} a_{n,N}z^n, \text{ où } \boxed{a_{n,N} = \begin{cases} 1 \text{ si } N \text{ divise } n \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}}$$

On démontre ensuite le résultat par récurrence sur N.
Pour l'**initialisation**, on remarque que

$$\prod_{k=1}^{1} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Or, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $p_{n,1} = 1$ car $\mathbb{P}_{n,1} = \{n\}$. L'initialisation est donc démontrée.
Pour l'**hérédité**, on suppose la proposition vraie au rang N. Alors, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-z^k} &= \left(\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k}\right) \frac{1}{1-z^{N+1}} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N+1} z^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n,N} z^n,\end{aligned}$$

où, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$c_{n,N} = \sum_{k=0}^{n} p_{k,N} a_{n-k,N+1}$$

Or, choisir une un élément de $P_{n,N+1}$, i.e. un $N+1$-uplet $(a_1, \dots, a_{N+1})$ tel que $\sum_{i=1}^{N+1} i a_i = n$, c'est

- choisir la valeur $k \in [\![0, n]\!]$ que va prendre $\sum_{i=1}^{N} i a_i$,
- puis, si $n-k$ n'est pas un multiple de $N+1$, c'est impossible d'écrire $n-k = a_{N+1}(N+1)$, d'où $0 = p_{k,N} a_{n-k,N+1}$ possibilités.
  En revanche, si $n-k$ est un multiple de $N+1$, il n'y a qu'une possibilité pour a_{N+1}, d'où, au total, $p_{k,N} a_{n-k,N+1}$ possibilités.

Donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} p_{k,N} a_{n-k,N+1} = p_{n,N+1}, \text{ d'où l'hérédité et le résultat !}}$

19. On sait que pour tout $N \geqslant \ell$, et $n \leqslant \ell$, $p_{n,N} = p_n$. Alors, pour ℓ fixé,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\ell} p_n x^n &= \sum_{n=0}^{\ell} p_{n,N} x^n \text{ quel que soit } N \geqslant \ell \\ &\leqslant \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k},\ \forall N \geqslant \ell \\ &\boxed{\leqslant \lim_{N \to +\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-x^n} = P(x).}\end{aligned}$$

On en déduit que pour $z \in D$, $\sum p_n z^n$ converge absolument (en refaisant l'inégalité précédente avec $x = |z|$), mais que pour $x > 1$, comme $p_n \geqslant 1$, $\sum p_n z^n$ diverge grossièrement.

$\boxed{\text{Donc le rayon de convergence de la série entière } \sum_n p_n z^n \text{ est 1.}}$

20. On remarque que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n = \sum_{n \geqslant N+1} (p_n - p_{n,N}) z^n$$

car, pour $N \geqslant n$, $p_{n,N} = p_n$. Mais, comme $p_{n,N}$ croît vers p_n, on remarque que

$$|(p_n - p_{n,N}) z^n| \leqslant 2 p_n |z|^n,$$

terme général d'une série convergente. Son reste tend donc vers 0, d'où

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n}$$

Mais

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} \underset{N\to+\infty\to P}{\longrightarrow} (z),$$

donc, $\boxed{\text{par unicité de la limite, } P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.}$

21. On remarque que le terme $P(\mathrm{e}^{-t})$ est inutile ici. On le rajoutera tout à la fin.
Soit $t > 0$. Alors

$$\mathrm{e}^{-in\theta} P(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-in\theta} p_k \mathrm{e}^{-kt} \mathrm{e}^{ik\theta} = \sum_{k\geqslant 0} \varphi_k(\theta).$$

Mais

$$\boxed{\|\varphi_k\|_\infty^{[-\pi,\pi]} \leqslant p_k \mathrm{e}^{-kt},}$$

terme général d'une série convergente (car $\mathrm{e}^{-kt} < 1$ pour $k \geqslant 1$). Donc la série de fonctions $\sum \varphi_k$ converge uniformément, donc normalement, donc

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k\geqslant 0} \varphi_k(\theta) d\theta &= \sum_{k\geqslant 0} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(\theta) d\theta \\ &= \sum_{k\geqslant 0} p_k \mathrm{e}^{-kt} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(k-n)\theta} d\theta \\ &\boxed{= 2\pi p_n \mathrm{e}^{-nt},}\end{aligned}$$

car, si $k \neq n$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(k-n)\theta} d\theta = \left[\frac{\mathrm{e}^{i(k-n)}}{(k-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$\boxed{\text{Le résultat s'ensuit immédiatement.}}$

D. Contrôle de P

22. D'après la question 3 , on sait que :

$$\left|\frac{1-x}{1-x\mathrm{e}^{i\theta}}\right| = \left|\exp\left(L\left(x\mathrm{e}^{i\theta}\right) - L(x)\right)\right| = \exp\left(\mathfrak{Re}\left(L\left(x\mathrm{e}^{i\theta}\right) - L(x)\right)\right).$$

Mais on sait que $L(x) \in \mathbb{R}$ et que

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}(L(x\mathrm{e}^{i\theta}) &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathfrak{Re}(x^n \mathrm{e}^{in\theta})}{n} \\ &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| &= \exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{(1-\cos(n\theta))}{n}x^n\right)\\ &= \exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{(1-\cos(n\theta))}{n}x^n\right)\\ &= \exp\left(-(1-\cos(\theta))x\right)\times\exp\left(-\sum_{n\geqslant 2}\frac{(1-\cos(n\theta))}{n}x^n\right)\\ &\boxed{\leqslant \exp\left(-(1-\cos(\theta))x\right),}\end{aligned}$$

car $-\sum_{n\geqslant 2}\frac{(1-\cos(n\theta))}{n}x^n \leqslant 0$.

Si $x\in[0,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$, on a alors

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| = \lim_{N\to+\infty}\left|\prod_{n=1}^{N}\frac{1-x^n}{1-x^ne^{in\theta}}\right|$$

Mais $N\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\left|\prod_{n=1}^{N}\frac{1-x^n}{1-x^ne^{in\theta}}\right| = \prod_{n=1}^{N}\left|\frac{1-x^n}{1-x^ne^{in\theta}}\right| &\leqslant \prod_{n=1}^{N}\exp\left(-(1-\cos(n\theta))x^n\right)\\ &= \exp\left(-\sum_{n=1}^{N}(1-\cos(n\theta))x^n\right)\\ &\boxed{= \exp\left(-\sum_{n=1}^{N}x^n+\sum_{n=1}^{N}\cos(n\theta)x^n\right)}\end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit en faisant tendre N vers $+\infty$, étant donné que l'exponentielle est continue et que

$$\sum_{n=1}^{N}x^n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{1-x}$$

et que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N}\cos(n\theta)x^n = \mathfrak{Re}\left(\sum_{n=1}^{N}(e^{i\theta}x)^n\right)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)}$$

23. *Si vous arrivez là en ayant fait toutes les questions d'avant, je vous invite au resto. Moi-même, j'y ai passé + que 3 heures à taper ce corrigé et j'en ai un peu marre...*
On écrit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-xe^{i\theta}} &= \frac{1}{1-x\cos(\theta)+ix\sin(\theta)}\\ &= \frac{1-x\cos(\theta)-ix\sin(\theta)}{(1-x\cos(\theta))^2+\sin(\theta)^2}\\ &= \frac{1-x\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{1-2x\cos(\theta)+x^2\cos(\theta)^2+x\sin(\theta)^2}\\ &= \frac{1-x\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{1-2x\cos(\theta)+x^2}. \qquad = \frac{1-x\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{(1-x)^2+2x(1-\cos(\theta)}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} - \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) &= \frac{1}{1-x} - \frac{1-x\cos(\theta)}{(1-x)^2+2x(1-\cos(\theta)} \\
&= \frac{(1-x)^2+2x(1-\cos(\theta)-(1-x)(1-x\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta)\right)} \\
&= \frac{(1-x)^2+1-x\cos(\theta)+x(1-\cos(\theta)}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta)\right)} \\
&\boxed{\geqslant \frac{x(1-\cos(\theta)}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta)\right)},}
\end{aligned}$$

car $x \in [0,1[$, donc $1-x\cos(\theta) \geqslant 0$.
Maintenant, si $x \geqslant \frac{1}{2}$, on a déjà, par la question précédente et le début de cette question,

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)}\right).$$

Ensuite,

- si $x(1-\cos(\theta)) \leqslant (1-x)^2$,

$$\begin{aligned}
-\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)} &\leqslant -\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-x)^2\right)} \\
&\leqslant -\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)^3(1+2x)} \\
&\leqslant -\frac{x(1-\cos(\theta))}{3(1-x)^3} \text{ car } x \leqslant 1 \\
&\boxed{\leqslant -\frac{1-\cos(\theta)}{6(1-x)^3}} \text{ car } x \geqslant \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

- dans le cas contraire, si $x(1-\cos(\theta)) \geqslant (1-x)^2$,

$$-\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)} \leqslant -\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\cdot 3x(1-\cos(\theta))} = -\frac{1}{3(1-x)},$$

On en déduit, par croissance de l'exponentielle, que

$$\boxed{\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1-\cos(\theta)}{6(1-x)^3}\right) \text{ ou } \left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).}$$

24. Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$. Alors

$$\begin{aligned}
1-\cos(\theta) &= 1-\cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) \\
&= 1-1+2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&= 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

Or, par concavité du sinus, pour tout x dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a l'inégalité

$$\sin(x) \geqslant \frac{2x}{\pi}.$$

Ainsi, comme $\frac{\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\boxed{1-\cos(\theta) \geqslant \frac{2}{\pi^2}\theta^2.}$$

Ensuite, on remarque que pour tout t tel que $\mathrm{e}^{-t} \geqslant \frac{1}{2}$, i.e. $t \leqslant \ln(2)$, alors

$$\left|\frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}e^{i\theta}\right)}{P(\mathrm{e}^{-t})}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1-\cos(\theta)}{6(1-\mathrm{e}^{-t})^3}\right) \text{ ou } \left|\frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}e^{i\theta}\right)}{P(\mathrm{e}^{-t})}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3(1-\mathrm{e}^{-t})}\right)$$

On traite chaque inégalité séparément :

- dans la première inégalité, comme $\mathrm{e}^{-t} \geqslant 1-t$, on a $1-\mathrm{e}^{-t} \leqslant t$, donc $\frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-t})^3} \geqslant \frac{1}{t^3}$, et donc $\frac{1-\cos(\theta)}{6(1-\mathrm{e}^{-t})^3} \geqslant \frac{\alpha\theta^2}{6t^3}$, d'où

$$\boxed{\exp\left(-\frac{1-\cos(\theta)}{6(1-\mathrm{e}^{-t})^3}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{\alpha\theta^2}{6t^3}} = \mathrm{e}^{-\beta(t^{-3/2}\theta)^2},}$$

  en posant $\beta = \frac{\alpha}{6} > 0$

- la seconde se traite de la même manière, en posant $\gamma = \frac{1}{3\pi^{2/3}}$.

$$\boxed{\text{D'où le résultat désiré en posant } t_0 = \ln(2),\ \beta = \frac{\alpha}{6} \text{ et } \gamma = \frac{1}{3\pi^{2/3}}.}$$

25. On sait que pour tout θ dans $[-\pi, \pi]$ et $t \leqslant t_0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)} \mathrm{d}\theta\right| &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left|e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \mathrm{d}\theta \\ &\leqslant \max\left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2} d\theta, \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\gamma\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}} d\theta\right).\end{aligned}$$

Or,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2} d\theta =_{\omega = t^{-3/2}\theta} t^{3/2} \int_{-\pi t^{-3/2}}^{\pi t^{-3/2}} \mathrm{e}^{-\beta\omega^2} d\omega.$$

Or, par comparaison à $\frac{1}{\omega^2}$, $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\beta\omega^2} d\omega$ converge, donc

$$\boxed{t^{3/2} \int_{-\pi t^{-3/2}}^{\pi t^{-3/2}} \mathrm{e}^{-\beta\omega^2} d\omega \underset{t\to 0}{=} O(t^{3/2})}.$$

Le même changement de variables assure que

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\gamma\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}} d\theta \underset{t\to 0}{=} O(t^{3/2})}$$

E. Conclusion

26. Prenons $t = \dfrac{\pi}{\sqrt{6n}}$ dans (1). Alors

$$p_n = \frac{\mathrm{e}^{nt} P(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-in\theta} \frac{P(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}} \mathrm{e}^{i\theta})}{P(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}})} d\theta.$$

Or, d'après la question précédente :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}+i\theta}\right)}{P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)} \mathrm{d}\theta \underset{n\to+\infty}{=} O\left(n^{-3/4}\right)$$

Mais par la question 16

$$P\left(e^{-t}\right) \underset{t\to 0}{=} e^{\frac{\pi^2}{6t}} e^{\frac{\ln(t)}{2}} e^{-\frac{\ln(2\pi)}{2}} e^{o(1)} \underset{t\to 0}{\sim} \sqrt{t} e^{\frac{\pi^2}{6t}} \cdot e^{-\frac{\ln(2\pi)}{2}} \underset{t\to 0}{=} O\left(\sqrt{t} e^{\frac{\pi^2}{6t}}\right)$$

On en déduit que

$$P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(n^{-1/4} e^{\frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{6}}}\right)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} p_n &\underset{n\to+\infty}{=} O\left(e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}} \times n^{-1/4} e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}} \times n^{-3/4}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} O\left(n^{-1} e^{2\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}}\right) \\ &\boxed{\underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n}\right)}, \end{aligned}$$

$\boxed{\text{ce qui est le dernier résultat à démontrer !}}$