Mathématiques, DS 06B : E3A PC 2023/CCINP PSI 2021
Corrigé

Exercice

1. Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\mathrm{I}_n(-x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(-tx)dt = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(tx)dt = \mathrm{I}_n(x),$$

par parité de la fonction cos.

2. Il s'agit d'appliquet un théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre. Fixons n et notons $g_n(x,t) = (1-t^2)^n \cos(tx)$, pour tout t dans $[0,1]$ et x dans $\mathbb{R}$. Alors

- pour tout t dans $[0,1]$, $x \mapsto g_n(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ et $\dfrac{\partial g_n}{\partial x} g_n(x,t) = -t(1-t^2)^n \sin(tx)$.
- pour tout x dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto g_n(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,1]$ (car continue sur $[0,1]$)
- pour tout x dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial g_n}{\partial x} g_n(x,t)$ est continue sur $[0,1]$.
- pour tout x dans $\mathbb{R}$ et t dans $[0,1]$,

$$\left|\frac{\partial g_n}{\partial x} g_n(x,t)\right| = t(1-t^2)^n |\sin(tx)| \leqslant t(1-t^2)^n,$$

indépendante de x et intégrable sur $[0,1]$.

Donc, d'après le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre, I_n est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\boxed{\mathrm{I}_n'(x) = \int_0^1 -t(1-t^2)^n \sin(tx)dt.}$$

3. Dans l'intégrale précédente, effectuons une intégration par parties, en intégrant $t \mapsto -t(1-t^2)^n$ en $t \mapsto \dfrac{1}{2(n+1)}(1-t^2)^{n+1}$ et en dérivant $t \mapsto \sin(tx)$ en $t \mapsto x\cos(tx)$. Ainsi, on obtient

$$\mathrm{I}_n'(x) = \left[\frac{1}{2(n+1)}(1-t^2)^{n+1}\sin(tx)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2(n+1)}(1-t^2)^{n+1} x\cos(tx)dt = \boxed{-\frac{x}{2(n+1)}\mathrm{I}_{n+1}(x).}$$

4. On démontre par récurrence que pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}_k \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n \text{ est de classe } \mathscr{C}^k.$$

Initialisation. Toutes les I_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, a fortiori, de classe $\mathscr{C}^0$.
Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_k$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors par la question précédente, I_n est dérivable et pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\mathrm{I}_n'(x) = -\frac{x}{2(n+1)}\mathrm{I}_{n+1}(x).$$

Ainsi, I_n' est le produit de deux fonction qui sont, par hypothèse de récurrence, de classe $\mathscr{C}^k$.
On en déduit que $\boxed{\mathrm{I}_n \text{ est de classe } \mathscr{C}^{k+1}.}$
On en déduit donc l'hérédité ainsi que la conclusion de la récurrence : pour tout k dans $\mathbb{N}$, pour tout n dans $\mathbb{N}$, I_n est de classe $\mathscr{C}^k$.

5. (a) Soit p dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\mathrm{I}_{p+1}(0) = \int_0^1 (1-t^2)^{p+1} dt.$$

On fait une intégration par parties en intégrant $t \mapsto 1$ en $t \mapsto t$ et en dérivant $t \mapsto (1-t^2)^{p+1}$ en $-2t(p+1)(1-t^2)^p$. On obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{p+1}(0) &= \left[t(1-t^2)^{p+1}\right]_0^1 + \int_0^1 2t^2(p+1)(1-t^2)^p dt \\
&= 2(p+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^p dt \\
&= 2(p+1)\int_0^1 (t^2-1+1)(1-t^2)^p dt \\
&= -2(p+1)\mathrm{I}_{p+1}(0) + 2(p+1)\mathrm{I}_p(0),
\end{aligned}$$

d'où $(2p+3)\mathrm{I}_{p+1}(0) = 2(p+1)\mathrm{I}_p(0)$, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathrm{I}_{p+1}(0) = \frac{2(p+1)}{2(p+1)+1}\mathrm{I}_p(0).}$$

(b) On en déduit, pour n dans $\mathbb{N}$, que

$$\mathrm{I}_n(0) = \frac{2n}{2n+1}\mathrm{I}_{n-1}(0) = \cdots = \frac{\prod_{k=1}^n (2k)}{\prod_{k=1}^n (2k+1)}\mathrm{I}_0(0) = \frac{\left(\prod_{k=1}^n (2k)\right)^2}{\prod_{k=1}^n (2k+1)\prod_{k=1}^n (2k)} \times 1 \boxed{= \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!}.}$$

6. *Conseil de stratégie : je n'ai pas vu comment calculer directement cette somme... j'ai alors regardé les questions précédentes !*
On remarque que

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n(0) &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k t^{2k} dt \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}\int_0^1 t^{2k} dt \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{2k+1}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}\mathrm{I}_n(0)\frac{4^n n!}{(2n+1)!}.$$

7. On sait que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{p\geqslant 0} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}.}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit x dans $\mathbb{R}$, fixé. Alors pour tout t dans $[0,1]$,

$$(1-t^2)^n \cos(tx) = \sum_{p\geqslant 0} \frac{(-1)^p}{(2p)!}(1-t^2)^p t^{2p} x^{2p} = \sum_{p\geqslant 0} \varphi_p(t),$$

en notant
$$\varphi_p(t) = \frac{(-1)^p}{(2p)!}(1-t^2)^p t^{2p} x^{2p}.$$
Or, pour t dans $[0,1]$,
$$|\varphi_p(t)| \leqslant \frac{|x|^{2p}}{(2p)!},$$
donc φ_p est bornée sur $[0,1]$ et
$$\|\varphi_p\|_\infty^{[0,1]} \leqslant \frac{|x|^{2p}}{(2p)!},$$
terme général d'une série convergente. Ainsi, la série de fonctions $\sum \varphi_p$ converge normalement sur $[0,1]$, donc uniformément, donc, par le théorème d'intégration d'une série de fonctions sur un segment,
$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{p\geqslant 0} \varphi_p(t)dt &= \sum_{p\geqslant 0}\int_0^1 \varphi_p(t)dt \\ &= \sum_{p\geqslant 0}\int_0^1 \frac{(-1)^p}{(2p)!}(1-t^2)^n t^{2p}x^{2p}dt \\ &= \sum_{p\geqslant 0} a_p x^{2p},\end{aligned}$$
où $\boxed{a_p = \frac{(-1)^p}{(2p)!}\int_0^1 (1-t^2)^n t^{2p}dt}$.

9. On en déduit alors que I_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, car la somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur le disque ouvert de convergence.
La question est suffisamment vague pour que l'on ne fasse pas plus d'efforts.

Problème

Partie I - Quelques propriétés des fonctions f_α

10. Soit α dans $\mathbb{R}$. Alors
$$\frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$
donc le rayon de convergence de toutes les séries entières définissant les f_α est 1.

11. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Distinguons les cas comme indiqué.

- si $\alpha \leqslant 0$, alors pour $|x| \geqslant 1$, $\left(\frac{x^n}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Donc $\boxed{\mathcal{D}_\alpha =]-1,1[}$.
- si $\alpha \in]0,1]$, alors $\frac{1}{n^\alpha}$ est le terme général d'une série divergente, donc f_α n'est pas définie en 1. En revanche, $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et tend vers 0, donc, d'après le critère des séries alternés, la série de terme général $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donc $\boxed{\mathcal{D}_\alpha = [-1,1[}$.
- si $\alpha > 1$, alors quel que soit x dans $[-1,1]$, $\left|\frac{x^n}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$, terme général d'une série de Riemann divergente. Donc $\boxed{\mathcal{D}_\alpha = [-1,1]}$.

12. Soit $x \in D_\alpha$. Si $x \geqslant 0$, alors $f_\alpha(x) \geqslant 0$.
Sinon, $x = -y$ avec $y \in]0,1]$. Alors

$$f_\alpha(x) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{y^n}{n^\alpha}.$$

Par le critère des séries alternées, $f_\alpha(x)$ est du signe de son premier terme, c'est-à-dire du signe de $(-1)^0 = 1$, donc $f_\alpha(x)$ est positive.
Finalement, $\boxed{f_\alpha(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \mathcal{D}_\alpha.}$

13. On remarque que pour tout x dans $]-1,1[$,

$$\boxed{f_0(x) = \sum_{n \geqslant 1} x^n = \frac{x}{1-x}.}$$

Puis, pour tout x dans $]-1,1[$,

$$f_{-1}(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n^{-1}} = \sum_{n \geqslant 1} n x^n = x \sum_{n \geqslant 1} n x^{n-1} \boxed{= \frac{x}{(1-x)^2}.}$$

Enfin, pour tout x dans $[-1,1[$,

$$\boxed{f_1(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).}$$

14. Pour $\alpha > 1$, $\mathcal{D}_\alpha = [-1,1]$. Notons $g_n(x) = \dfrac{x^n}{n^\alpha}$. Alors

- pour tout n dans $\mathbb{N}$, g_n est continue sur $[-1,1]$,
- pour tout x dans $[-1,1]$,

$$|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^\alpha},$$

  donc g_n est bornée sur $[-1,1]$ et $\|g_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$, donc la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur $[-1,1]$.

Ainsi, par le théorème de continuité des séries de fonctions, f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha$.

15. *Remarque : cette question nous faisait bien penser au fait que $1 \notin \mathcal{D}_\alpha$ lorsque $\alpha \leqslant 1$.*
Soit $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $n \geqslant n^\alpha$, donc

$$\frac{x^n}{n} \leqslant \frac{x^n}{n^\alpha},$$

donc en sommant,

$$\forall x \in [0,1[, \quad \boxed{f_\alpha(x) \geqslant f_1(x) = -\ln(1-x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} +\infty,}$$

d'où la limite désirée.

16. Par définition, la fonction génératrice d'une variable aléatoire est continue sur $[-1,1]$, donc G_α doit être définie sur $[-1,1]$ donc, nécessairement, $\boxed{\alpha > 1}$. Ensuite, par définition, $\boxed{G_\alpha(1) = 1}$, d'où $\lambda = \dfrac{1}{f_\alpha(1)}$.

17. On sait, par définition de la fonction génératrice, que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_\alpha = n) = \frac{\lambda}{n^\alpha}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{n^\alpha} = \lambda \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}},$$

et cette somme est finie si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, i.e. $\boxed{\alpha > 2.}$ Dans ce cas

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \lambda f_{\alpha-1}(1) = \frac{f_{\alpha-1}(1)}{f_\alpha(1)}.}$$

Partie II - Un logarithme complexe

18. On sait que pour tout x dans $]-1,1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n.$$

19. On remarque que

$$\left| \frac{-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}}{-\frac{(-1)^n}{n}} \right| = \frac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc, d'après le critère de D'Alembert, $\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière définissant } S \text{ est } 1.}$
Pour x réel dans $]-1,1[$

$$\exp(S(x)) = \exp\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \right) = \exp(\ln(1+x)) \boxed{= 1+x.}$$

20. Déjà, si $z_0 = 0$, la série est la série nulle, de rayon de convergence infini. Ensuite, on note $a_n = (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n}$. Alors si $z_0 \neq 0$,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |z_0| \frac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z_0|,$$

donc, par la règle de D'Alembert, le rayon de convergence de la série est $\boxed{\frac{1}{|z_0|}}$.

21. Comme $|z_0| < R$, $\frac{1}{|z_0|} > 1$. Donc, comme, par propriété de régularité des séries entières, g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, on en déduit que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$.
Ensuite, si $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} n t^{n-1} \\ &= \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} z_0^n t^{n-1} \\ &\boxed{= \frac{z_0}{1+tz_0}.} \end{aligned}$$

22. Comme g est dérivable sur $[0,1]$ et exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, h l'est aussi et,

$$\forall t \in [0,1],\ h'(t) = g'(t)\exp' \circ g(t) = \frac{z_0}{1+tz_0}h(t).$$

23. C'est une question difficile, car on ne peut pas résoudre directement l'équation différentielle... En revanche, si l'on pose $\varphi : t \mapsto 1+tz_0$, alors φ est solution de l'équation différentielle, $\varphi(0) = g(0) = 1$, donc, par le théorème de Cauchy, $h = g$.
Ainsi, pour tout t dans $[0,1]$, $g(t) = 1+tz_0$. Ainsi,

$$\boxed{\exp(S(z_0)) = g(1) = z_0 + 1.}$$

Partie III - Un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1, dans le cas où $\alpha \in]0,1[$.

24. Soit $x \in]0,1[$. Notons $f(t) = \dfrac{x^t}{t^\alpha} = \dfrac{e^{t\ln(x)}}{t^\alpha}$. Alors

- f est continue sur $]0,+\infty[$,
- $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$, intégrable en 0 car $\alpha < 1$,
- $t^2 f(t) = t^{2-\alpha}e^{t\ln(x)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, car $\ln(x) < 0$, et par croissances comparées, donc $\boxed{f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)}$, intégrable en $+\infty$, donc f est intégrable en $+\infty$.

$\boxed{\text{L'intégrale } \mathrm{I}(x) \text{ est donc bien définie.}}$

25. Soit $x \in]0,1[$. Dans l'intégrale $\mathrm{I}(x)$, on effectue le changement de variable $u = -t\ln(x)$: $\varphi : t \mapsto -t\ln(x)$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\left(\frac{u}{-\ln(x)}\right)^\alpha}\frac{du}{-\ln(x)} \\
&= \frac{1}{(-\ln(x))^{1-\alpha}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u^\alpha}du \\
&= \frac{1}{(-\ln(x))^{1-\alpha}}\int_0^{+\infty} u^{(1-\alpha)-1}du \\
&\boxed{= \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(-\ln(x))^{1-\alpha}}}
\end{aligned}$$

26. Soit $x \in]0,1[$. On dérive $f : t \mapsto \dfrac{x^t}{t^\alpha} = \dfrac{e^{t\ln(x)}}{t^\alpha}$.

$$\begin{aligned}
\forall t > 0,\ f'(t) &= \frac{\ln(x)x^t t^\alpha - \alpha x^t t^{\alpha-1}}{t^{2\alpha}} \\
&\boxed{= \frac{x^t}{t^{\alpha+1}}(t\ln(x) - \alpha) < 0,}
\end{aligned}$$

car $\ln(x) < 0$ et $\alpha > 0$. $\boxed{\text{Donc } f \text{ décroît bien.}}$

27. Fixons $x \in]0,1[$ et notons toujours f comme à la question précédente. Soit $n \geqslant 1$. Comme f décroît sur $[n, n+1]$, pour tout t dans $[n, n+1]$,

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leqslant f(t) \leqslant \frac{x^n}{n^\alpha},$$

soit, en intégrant entre n et $n+1$,

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{x^t}{t^\alpha} dt \leqslant \frac{x^n}{n^\alpha}$$

On peut réécrire les choses autrement en disant que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\boxed{\int_n^{n+1} \frac{x^t}{t^\alpha} dt \leqslant \frac{x^n}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{x^t}{t^\alpha} dt,}$$

d'où le résultat, en sommant pour n allant de 1 à $+\infty$.

28. On sait déjà que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt &= \frac{1}{(-\ln(x))^{1-\alpha}} \Gamma(1-\alpha) \\ &\underset{x\to 1}{\sim} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(1-x)^{1-\alpha}}\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt = \int_0^{1} \frac{x^t}{t^\alpha} dt + \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt$$

Mais

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha} dt \leqslant \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1},$$

donc

$$\int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha} dt \underset{x\to 1}{=} O(1) \underset{x\to 1}{=} o\left(\frac{\Gamma(1-\alpha)}{(1-x)^{1-\alpha}}\right)$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha} dt \underset{x\to 1}{\sim} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(1-x)^{1-\alpha}},$$

et, par encadrement, que

$$\boxed{f_\alpha(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(1-x)^{1-\alpha}}}$$