PSI – Programme de colles
Semaine 16 – du 2 au 7 février 2025

Programme en bref.

— Cours sur les séries entières, les fonctions génératrices et le début (tout début) des endomorphismes dans les euclidiens (cf. questions de cours).

— Exercices sur les séries entières/équations différentielles/séries entières et probabilités. On peut poser des problèmes de raccordement des séries entières. Les méthodes du type « abaissement de l'ordre » pour l'ordre 2 ont été vues mais doivent toujours être guidées.

Exemples de questions de cours

1. Caractère $\mathscr{C}^1$ de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence.
2. DSE usuels.

3. G_X converge normalement sur $[-1,1]$ et est continue sur $[-1,1]$. Valeur de $G_X(1)$.
4. Si X admet une espérance, alors G_X est dérivable en 1 et $G'_X(1) = \mathscr{E}(X)$. (la preuve de la réciproque est hors-programme)
5. Fonctions génératrices usuelles.

6. Si E est euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$, $u \in \mathscr{O}(E)$ ssi u préserve le produit scalaire ssi u transforme toute BON en BON.
7. $\mathscr{O}(E)$ est inclus dans $GL(E)$, stable par composition et passage à l'inverse.
8. Une matrice A est dans $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si ses colonnes forment une BON de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Séries entières

Les objectifs de cette section sont les suivants :

— *étudier la convergence d'une série entière et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;*

— *étudier les propriétés de sa somme en se limitant à la continuité dans le cas d'une variable complexe ;*

— *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les séries entières trouveront un cadre d'application dans la notion de fonction génératrice en probabilités et au détour d'exemples de résolution d'équations différentielles linéaires.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Rayon de convergence	
Série entière de la variable réelle, de la variable complexe. Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\lvert z\rvert < R$, et elle diverge grossièrement si $\lvert z\rvert > R$.
Intervalle ouvert de convergence. Disque ouvert de convergence.	
Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) :	Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R\left(\sum n^\alpha x^n\right) = 1$.
— si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$;	Le résultat s'applique en particulier lorsque $a_n = o(b_n)$.
— si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.	La limite du rapport $\dfrac{\lvert a_{n+1}\rvert}{\lvert a_n\rvert}$ peut être directement utilisée.
Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.	

b) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.	
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.	L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.
Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.	Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.	
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.	

c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r,r[$.	
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.	Formule de Taylor avec reste intégral.
Unicité du développement en série entière.	
Développements des fonctions usuelles.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, $\arctan$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe sur le disque ouvert de convergence.	La démonstration est hors programme.
Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.	
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.	

Équations différentielles linéaires scalaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$.	
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	La résolution explicite de l'équation différentielle doit comporter des indications.
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène, dimension.	Exemples d'utilisation de développements en série entière pour la recherche de solutions.

Fonctions génératrices de variables aléatoires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\,t^n.$$	La série entière définissant G_X est de rayon $\geqslant 1$ et converge normalement sur $[-1,1]$. Continuité de G_X. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.	
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = {G_X}'(1)$.	La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de G_X pour calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.
Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.