Concours Centrale-Supélec 2020

Épreuve de mathématiques I, PSI, quatre heures

Corrigé

I – Cas de la loi de Poisson

I. A –

Q 1. Par hypothèse les variables aléatoires $X_1, \dots, X_{n+1}$ sont mutuellement indépendantes. Donc, d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et X_{n+1} sont indépendantes, d'où le résultat.

Si l'on se dispense du lemme des coalitions : on note qu'il est assez facile de se convaincre que si $X_1, \dots, X_{n+1}$ sont mutuellement indépendantes, alors les variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ et X_{n+1} sont indépendantes (par définition même de l'indépendance mutuelle). Donc, si l'on note $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ et $g : x \mapsto x$, les variables aléatoires $f((X_1, \dots, X_n)) = S_n$ et $g(X_{n+1}) = X_{n+1}$ sont aussi indépendantes.

Q 2. Comme X_1 suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{1}{2}$, on a en particulier :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_1 = k) = e^{-\frac{1}{2}} \frac{(1/2)^k}{k!}.$$

Comme la série exponentielle est de rayon de convergence infini, $\sum\limits_{k \geqslant 0} P(X_1 = k)t^k = \sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{k!} \left(\frac{t}{2}\right)^k$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$, et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_{X_1}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1 = k)t^k = e^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{2}\right)^k \overset{(*)}{=} e^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{2}} = e^{\frac{t-1}{2}},$$

l'égalité $(*)$ étant vraie par définition de l'exponentielle ; d'où le résultat.

Q 3. Soit $t \in \mathbb{R}$. Nous allons démontrer l'égalité $G_{S_n}(t) = (G_{X_1}(t))^n$ par récurrence sur n. Si $n = 1$, elle est triviale étant donné que $S_1 = X_1$.
Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ tel qu'on ait $G_{S_n}(t) = (G_{X_1}(t))^n$: montrons que $G_{S_{n+1}}(t) = (G_{X_1}(t))^{n+1}$. Comme $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, et que S_n et X_{n+1} sont indépendantes d'après la question **Q 1**, on a : $G_{S_{n+1}} = G_{S_n} \times G_{X_{n+1}}$. Or X_{n+1} suit la même loi que X_1, donc elles ont la même fonction génératrice ; comme de plus on a $G_{S_n}(t) = (G_{X_1}(t))^n$ par hypothèse de récurrence, on en déduit :

$$G_{S_{n+1}}(t) = G_{S_n}(t) \times G_{X_{n+1}} = (G_{X_1}(t))^n \times G_{X_1}(t) = (G_{X_1}(t))^{n+1},$$

ce qui démontre que la propriété est héréditaire.
Ainsi, par récurrence, nous avons démontré :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_{S_n}(t) = (G_{X_1}(t))^n.$$

Q 4. Nous avons démontré dans la question **Q 2** que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $G_{X_1}(t) = e^{\frac{t-1}{2}}$. Donc, d'après la question précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_{S_n}(t) = (G_{X_1}(t))^n = \left(e^{\frac{t-1}{2}}\right)^n = e^{\frac{n(t-1)}{2}}.$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi de Poisson de paramètre $\frac{n}{2}$. Comme une fonction génératrice de variable aléatoire caractérise sa loi de probabilité, on en déduit que S_n suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{n}{2}$, donc en particulier :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(S_n = k) = e^{-\frac{n}{2}} \frac{(n/2)^k}{k!}. \tag{1}$$

I. B –

Q 5. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a : $(S_n > n) = \bigcup\limits_{k=n+1}^{+\infty} (S_n = k)$, et donc par σ-additivité :

$$\begin{aligned} P(S_n > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(S_n = k) \overset{(1)}{=} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-\frac{n}{2}} \frac{(n/2)^k}{k!} &\overset{[k'=k-n]}{=} e^{-\frac{n}{2}} \sum_{k'=1}^{+\infty} \frac{(n/2)^{n+k'}}{(n+k')!} \\ &= e^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)^n \sum_{k'=1}^{+\infty} \frac{(n/2)^{k'}}{(n+k')!}, \end{aligned}$$

et donc, en multipliant chaque membre de cette égalité par $n! \left(\frac{2}{n}\right)^n$, et en renommant la variable muette k' en k :

$$n! \left(\frac{2}{n}\right)^n P(S_n > n) = e^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} n! \frac{(n/2)^k}{(n+k)!} = e^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n! n^k}{(n+k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

d'où le résultat.

Q 6. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La clé, pour démontrer cet encadrement, est de remarquer que pour tout $\ell \in [\![n+1, n+k]\!]$, on a $n+1 \leqslant \ell \leqslant n+k$ (tautologie), de sorte que :

$$\underbrace{\prod_{\ell=n+1}^{n+k} (n+1)}_{=(n+1)^k} \leqslant \underbrace{\prod_{\ell=n+1}^{n+k} \ell}_{=\frac{(n+k)!}{n!}} \leqslant \underbrace{\prod_{\ell=n+1}^{n+k} (n+k)}_{=(n+k)^k},$$

et donc, après division par $n^k > 0$:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^k \leqslant \frac{(n+k)!}{n! n^k} \leqslant \left(\frac{n+k}{n}\right)^k$$

Comme $n+1 \geqslant n$, on a $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^k \geqslant 1$, donc l'encadrement précédent donne, après passage à l'inverse :

$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^k \leqslant \frac{n! n^k}{(n+k)!} \leqslant 1,$$

d'où le résultat.

Q 7. Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1+kx}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$, donc sa valeur maximale est en 0 et on en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \|u_k\|_\infty = |u_k(0)| = \frac{1}{2^k}.$$

Or la série géométrique $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{1}{2^k}$ converge parce que sa raison est $\dfrac{1}{2} \in]-1, 1[$, ce qui démontre que la série de fonctions $\sum\limits_{k \geqslant 1} u_k$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.

Q 8. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$\sum_{k \geqslant 1} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k \geqslant 1} u_k \left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme la série de fonctions $\sum_{k \geqslant 1} u_k$ converge normalement sur $[0, +\infty[$, en particulier elle converge simplement sur $[0, +\infty[$, donc la série numérique $\sum_{k \geqslant 1} u_k(x)$ converge pour tout $x \in [0, +\infty[$; d'où la convergence de la série demandée en prenant $x = \frac{1}{n} \in [0, +\infty[$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Pour la limite qui suit, notons qu'on nous demande de démontrer, avec les notations ci-dessus :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Par composition de limites (ou par le sens direct de la caractérisation séquentielle de la limite), il suffit pour cela de démontrer qu'on a :

$$\lim_{x \to 0} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k (x) = 1.$$

Or la série de fonctions $\sum_{k \geqslant 1} u_k$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, +\infty[$. Comme, de plus, il est clair que u_k est continue sur $[0, +\infty[$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on en déduit que $x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} u_k (x)$ est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que limite uniforme de fonctions continues. Ainsi sa limite en 0 est sa valeur en 0 :

$$\lim_{x \to 0} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k (x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k (0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1,$$

d'où le résultat. On pouvait aussi utiliser le théorème de la double limite.

Q 9. Nous avons démontré dans la question **Q 5** que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad n! \left(\frac{2}{n}\right)^n P(S_n > n) = e^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n! n^k}{(n+k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Conjointement à l'encadrement de la question **Q 6**, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad e^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+k}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \leqslant n! \left(\frac{2}{n}\right)^n P(S_n > n) \leqslant e^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Notons que la somme du membre de gauche peut se réécrire ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+k}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{k}{n}}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

De plus on a démontré que $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$ dans la question précédente. Par conséquent nous déduisons de ce qui précède l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leqslant e^{\frac{n}{2}} n! \left(\frac{2}{n}\right)^n P(S_n > n) \leqslant 1.$$

Le membre de droite de cet encadrement tend bien sûr vers 1 quand $n \to +\infty$. C'est aussi le cas du membre de gauche d'après la question précédente. Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{n}{2}} n! \left(\frac{2}{n}\right)^n P(S_n > n) = 1,$$

ce dont on déduit immédiatement :

$$P(S_n > n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n!}\left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

d'où le résultat.

Q 10. On rappelle la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. On l'utilise dans l'équivalent obtenu dans la question précédente, et on en déduit :

$$P(S_n > n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\left(\frac{n}{2}\right)^n = \frac{e^{-\frac{n}{2}} \times e^n}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n.$$

Posons : $\alpha = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$. Comme $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a en particulier $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} = \underset{n\to+\infty}{o}(1) = \underset{n\to+\infty}{O}(1)$, et donc : $P(S_n > n) = \underset{n\to+\infty}{O}(\alpha^n)$.

Il reste à vérifier qu'on a bien $\alpha \in]0,1[$; la calculatrice étant autorisée, on fait l'application numérique : $\alpha \approx 0,824$.

En conclusion, on a bien démontré l'existence de $\alpha \in]0,1[$ tel que :

$$P(S_n > n) = \underset{n\to+\infty}{O}(\alpha^n).$$

II – Quelques résultats sur les matrices

II. A –

Q 11. Soit $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose d'abord que $\vec{x} \geqslant 0$, c'est-à-dire : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \geqslant 0$. Montrons que $A\vec{x} \geqslant 0$. On rappelle que d'après la définition donnée dans l'énoncé, cela revient à démontrer que tous les coefficients de $A\vec{x}$ sont positifs.

Si l'on note $A = ((a_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors le i^{e} coefficient de $A\vec{x}$ égale $\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$. Il s'agit d'une somme de réels positifs, puisque par hypothèse A est strictement positive et $\vec{x}$ positif, donc $\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \geqslant 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: d'où le résultat. On a bien $A\vec{x} \geqslant 0$.

Si l'on suppose de plus que $\vec{x} \neq \vec{0}$, alors il existe au moins un indice $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_{j_0} \neq 0$, et donc $x_{j_0} > 0$ (puisque $\vec{x}$ est à coefficients positifs). Ainsi :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \geqslant \underbrace{a_{i,j_0}}_{>0}\underbrace{x_{j_0}}_{>0} > 0,$$

ce qui démontre que sous cette hypothèse supplémentaire, tous les coefficients de $A\vec{x}$ sont strictement positifs, c'est-à-dire : $A\vec{x} > 0$.

Nous avons donc bien démontré :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \begin{cases} \vec{x} \geqslant 0 \Longrightarrow A\vec{x} \geqslant 0, \\ \vec{x} \geqslant 0 \text{ et } \vec{x} \neq \vec{0} \Longrightarrow A\vec{x} > 0, \end{cases}$$

Q 12. De façon naturelle, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ posons : $A^k = \left(\left(a_{i,j}^{(k)}\right)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a : $A^k > 0$.
Rappelons que $A > 0$ par hypothèse de l'énoncé. Donc la proposition est vraie pour $k = 1$ et est initialisée. Montrons l'hérédité de cette proposition : soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel qu'on ait : $A^k > 0$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient (i, j) de $A^{k+1} = A^k \times A$ est :

$$a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{t=1}^{n} a_{i,t}^{(k)} a_{t,j}^{(1)},$$

et l'on sait que $a_{t,j}^{(1)} > 0$ car $A > 0$, et que $a_{i,t}^{(k)} > 0$ car $A^k > 0$ par hypothèse de récurrence. Par conséquent, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient $a_{i,j}^{(k+1)}$ est une somme de réels strictement positifs, et il est donc également strictement positif : on a bien $A^{k+1} > 0$, d'où l'hérédité de la proposition.
En conclusion, par récurrence nous avons démontré : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A^k > 0$.

Q 13. Montrons que $\rho(A) > 0$ en raisonnant par l'absurde : si $\rho(A) = 0$, alors pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ on a, par définition de $\rho(A)$: $0 \leqslant |\lambda| \leqslant \rho(A) = 0$, donc : $\forall \lambda \in \mathrm{sp}(A)$, $\lambda = 0$. Cela signifie que 0 est l'unique valeur propre complexe de A. Ou encore, si l'on note χ_A le polynôme caractéristique de A : on sait qu'il est de degré n, unitaire, scindé sur $\mathbb{C}$, et que ses racines sont exactement les valeurs propres de A, donc le fait que 0 soit l'unique valeur propre complexe de A implique nécessairement :

$$\chi_A = (X - 0)^n = X^n.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, a donc : $\chi_A(A) = A^n = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$. Mais c'est impossible, puisque nous avons démontré dans la question précédente que $A^n > 0$, et donc qu'en particulier tous ses coefficients sont non nuls.
Par l'absurde, on a donc bien $\rho(A) > 0$.
Pour le second point de la question, remarquons que du fait que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$, tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et tout $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, on ait :

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff \alpha A\vec{x} = \alpha\lambda\vec{x}, \tag{2}$$

on obtient sans difficulté que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}^*, \quad \mathrm{sp}(\alpha A) = \alpha \mathrm{sp}(A) = \{\alpha\lambda \mid \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}. \tag{3}$$

De cela on déduit aisément que la plus grande valeur propre complexe (en module) de αA est la plus grande valeur propre complexe (en module) de A, multipliée par $|\alpha|$. C'est-à-dire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}^*, \quad \rho(\alpha A) = |\alpha|\rho(A). \tag{4}$$

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{\rho(A)}$:

$$\rho\left(\frac{A}{\rho(A)}\right) = \left|\frac{1}{\rho(A)}\right| \cdot \rho(A) = \frac{1}{\rho(A)} \cdot \rho(A) = 1,$$

d'où le résultat.

Q 14. Puisque A est une matrice diagonalisable, si l'on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec multiplicités, il existe une matrice $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{5}$$

Or par hypothèse : $\rho(A) < 1$, donc toutes les valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1, et on en déduit : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \lambda_i^k = 0$. La limite d'une suite de matrices étant prise coefficient par coefficient, il vient :

$$\lim_{k \to +\infty} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}.$$

Or l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, qui est de dimension finie, donc elle est continue. D'après la caractérisation séquentielle de la continuité, on en déduit :

$$\lim_{k \to +\infty} A^k = P \times 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \times P^{-1} = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})},$$

d'où le résultat.

II. B –

Q 15. Notons $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Tout d'abord, notons que l'inégalité $|\vec{x}| \leqslant A|\vec{x}|$ revient à démontrer, d'après la définition donnée dans l'énoncé, que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} \, |x_j| - |x_i| \geqslant 0 \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} \, |x_j| \geqslant |x_i|.$$

La somme ci-dessus représente le i^{e} coefficient du produit matriciel $A|\vec{x}|$. Vérifions que cette inégalité est vraie : soit $i \in [\![1, n]\!]$. Du fait que $\vec{x}$ soit un vecteur propre de A associé à λ, on a $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. C'est-à-dire, en identifiant le i^{e} coefficient :

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j.$$

Considérons le module de chaque membre de cette égalité, en se souvenant que par hypothèse on a $|\lambda| = 1$, et en utilisant l'inégalité triangulaire. On obtient alors :

$$|x_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^n |a_{i,j} x_j| = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j|,$$

et comme A est une matrice strictement positive on a $|a_{i,j}| = a_{i,j}$, donc finalement :

$$|x_i| \leqslant \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j|,$$

ce qu'on voulait démontrer. On a donc bien : $|\vec{x}| \leqslant A|\vec{x}|$.

Q 16. Pour trouver le réel ε qui conviendrait, notons que si l'on raisonnait *faussement*, en partant du principe que les règles de calcul dans les inégalités soient les mêmes que pour les inégalités dans $\mathbb{R}$ (ON N'EN SAIT RIEN DU TOUT !), alors pour obtenir l'inégalité $A^2|\vec{x}| - A|\vec{x}| > \varepsilon A|\vec{x}|$ il suffirait d'avoir :

$$A|\vec{x}| - |\vec{x}| > \varepsilon |\vec{x}|,$$

et de multiplier cette inégalité par $A > 0$. Nous allons commencer par démontrer cette première inégalité pour un bon choix de ε, puis nous verrons que la multiplication par $A > 0$ est licite.

Pour trouver $\varepsilon > 0$ tel que : $A|\vec{x}| - |\vec{x}| > \varepsilon|\vec{x}|$, écrivons d'abord cette inégalité coefficient par coefficient. Si $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, alors cette inégalité équivaut à, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| - |x_i| > \varepsilon|x_i|. \tag{6}$$

Comme $A|\vec{x}| - |\vec{x}| > 0$, cette inégalité est toujours vérifiée si $x_i = 0$, peu importe la valeur de ε. Si $x_i \neq 0$, alors cette inégalité équivaut à :

$$\varepsilon < \frac{1}{|x_i|}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| - |x_i|\right).$$

Pour trouver un $\varepsilon > 0$ qui vérifie cette inégalité pour tout i tel que $x_i \neq 0$, prenons :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\max\limits_{i\in[\![1,n]\!]}(|x_i|)} \cdot \min_{i\in[\![1,n]\!]}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| - |x_i|\right).$$

Notons qu'on a bien $\max\limits_{i\in[\![1,n]\!]}(|x_i|) > 0$ vu que $\vec{x}$ est un vecteur propre, et que ses coefficients ne sont donc pas tous nuls. La division est donc licite. On a $\varepsilon > 0$ puisque par hypothèse $A|\vec{x}| - |\vec{x}| > 0$, ce qui signifie effectivement que tous ses coefficients $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| - |x_i|$ sont strictement positifs.

Montrons que pour ce choix de ε, l'inégalité (6) est vérifiée pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Si $x_i = 0$ alors, comme nous l'avons déjà justifié plus haut, (6) est automatiquement vérifiée (et ce, sans tenir compte de la valeur de ε). Si $x_i \neq 0$ alors :

$$\begin{aligned}
\varepsilon|x_i| = \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{|x_i|}{\max\limits_{i'\in[\![1,n]\!]}(|x_{i'}|)}}_{\leqslant 1} \cdot \min_{i'\in[\![1,n]\!]}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i',j}|x_j| - |x_{i'}|\right) &\leqslant \frac{1}{2} \cdot \min_{i'\in[\![1,n]\!]}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i',j}|x_j| - |x_{i'}|\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| - |x_i|\right) \\
&< \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| - |x_i|,
\end{aligned}$$

donc (6) est vérifiée dans tous les cas.

Ainsi on a démontré l'inégalité $A|\vec{x}| - |\vec{x}| > \varepsilon|\vec{x}|$, et il reste à justifier qu'on peut effectivement la multiplier « comme on pense » par $A > 0$ pour obtenir $A^2|\vec{x}| - A|\vec{x}| > \varepsilon A|\vec{x}|$, et répondre à la question de l'énoncé. Pour alléger les notations (et parce qu'on réutilisera cette propriété dans la question suivante), je vais montrer que si $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\vec{y} < \vec{z} \Longrightarrow A\vec{y} < A\vec{z}, \tag{7}$$

et des choix adéquats de $\vec{y}$ et $\vec{z}$ nous donneront ce qu'on veut.

Si $\vec{y} < \vec{z}$, alors $\vec{z} - \vec{y} \geqslant 0$ et $\vec{z} - \vec{y} \neq \vec{0}$. Donc, d'après la question **Q 11**, on a $A(\vec{z} - \vec{y}) > 0$. C'est-à-dire, en développant et en réécrivant cette inégalité : $A\vec{z} > A\vec{y}$: d'où le résultat.

Concluons. Nous savons que $A|\vec{x}| - |\vec{x}| > \varepsilon|\vec{x}|$ pour le choix de ε que nous fîmes. En prenant $\vec{z} = A|\vec{x}| - |\vec{x}|$ et $\vec{y} = \varepsilon|\vec{x}|$ dans (7), on obtient : $A^2|\vec{x}| - A|\vec{x}| > \varepsilon A|\vec{x}|$, d'où le résultat.

Q 17. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La question précédente implique : $A^2|\vec{x}| \geqslant (1+\varepsilon)A|\vec{x}|$. Par une récurrence facile qui utilise l'inégalité (7) avec $A > 0$, on en déduit :

$$A^{k+1}|\vec{x}| \geqslant (1+\varepsilon)^k A|\vec{x}|.$$

Il est aisé de se convaincre que ces inégalités matricielles sont compatibles avec les multiplications par des réels positifs, et donc en divisant par $(1+\varepsilon)^k > 0$ on obtient : $\left(\dfrac{1}{1+\varepsilon}\right)^k A^{k+1}|\vec{x}| \geqslant A|\vec{x}|$. Il reste à écrire : $\left(\dfrac{1}{1+\varepsilon}\right)^k A^{k+1} = \left(\dfrac{1}{1+\varepsilon}\right)^k A^k A = B^k A$, et on a bien le résultat voulu.

Q 18. On a $B = \dfrac{1}{1+\varepsilon}A$ et donc, d'après (4) :

$$\rho(B) = \frac{\rho(A)}{1+\varepsilon} = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$$

car $\varepsilon > 0$ (rappelons que par hypothèse on a $\rho(A) = 1$). Donc, d'après la question **Q 14** (plus précisément le résultat admis qui suit dans l'énoncé : le résultat de cette question est valable même si l'on considère des puissances d'une matrice non diagonalisable) :

$$\lim_{k\to+\infty} B^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}.$$

Q 19. L'application $M \mapsto MA|\vec{x}|$ est continue sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, en tant qu'application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie. Par conséquent, la question précédente et la caractérisation séquentielle de la continuité permettent d'écrire :

$$\lim_{k\to+\infty} B^k A|\vec{x}| = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} \times A|\vec{x}| = \vec{0}.$$

Mais on a démontré dans la question **Q 17** que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : B^k A|\vec{x}| \geqslant A|\vec{x}|$. Il est assez clair qu'on peut passer à la limite dans une telle inégalité ; pour s'en convaincre, il suffit de le faire coefficient par coefficient. On obtient alors, quand $k \to +\infty$: $0 \geqslant A|\vec{x}|$. Du fait que $|\vec{x}| < A|\vec{x}|$ par hypothèse, il vient : $|\vec{x}| < 0$, ce qui est impossible puisque tous les coefficients de $|\vec{x}|$ sont positifs ou nuls.

Cette contradiction implique, par l'absurde, que l'hypothèse faite avant la question **Q 16**, à savoir que $|\vec{x}| < A|\vec{x}|$, est fausse. Comme on a pourtant démontré que $|\vec{x}| \leqslant A|\vec{x}|$ dans la question **Q 15**, la seule possibilité restante est qu'on ait :

$$|\vec{x}| = A|\vec{x}|.$$

Cette conclusion semble naturelle, mais nécessite une explication supplémentaire : en effet, avec cette relation d'ordre, il n'est pas vrai que si $\vec{x} \leqslant \vec{y}$, alors soit $\vec{x} < \vec{y}$, soit $\vec{x} = \vec{y}$: prendre l'exemple de $\vec{x} = (0,0)$ et $\vec{y} = (0,1)$ dans $\mathbb{R}^2$ par exemple. Il faut donc un argument supplémentaire pour conclure que $|\vec{x}| = A|\vec{x}|$: posons $\vec{y} = A|\vec{x}| - |\vec{x}| \geqslant 0$, et montrons que $\vec{y} = \vec{0}$. Si ce n'est pas le cas, alors d'après la question **Q 11** on a : $A\vec{y} > 0$. Mais alors, en reproduisant le raisonnement des questions **Q 16** à **Q 18** (on rappelle qu'on y raisonnait déjà sur $A\vec{y} = A^2|\vec{x}| - A|\vec{x}|$), on aurait à nouveau $|\vec{x}| = \vec{0}$, ce qui est encore contradictoire. Donc $\vec{y} = \vec{0}$.

Nous avons donc démontré que $|\vec{x}| = A|\vec{x}|$. Et comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ (c'est un vecteur propre), il vient également $|\vec{x}| \neq \vec{0}$: l'égalité précédente signifie donc que $|\vec{x}|$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

On a donc démontré que si A est une matrice strictement positive vérifiant $\rho(A) = 1$, alors 1 est valeur propre de A. On note par ailleurs que A admet un vecteur propre positif (le vecteur $|\vec{x}|$).

II. C –

Q 20. Nous savons pour le moment que A admet un vecteur propre positif associé à la valeur propre 1 : c'est ce que nous avons démontré dans la question précédente. Notons-le encore $|\vec{x}| = (|x_1|, \dots, |x_n|)$. Nous allons démontrer qu'en vérité, il est même strictement positif.

Pour cela, raisonnons par l'absurde, et supposons l'existence de $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i = 0$. En regardant le i^{e} coefficient dans l'égalité $A|\vec{x}| = |\vec{x}|$, il vient :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| = |x_i| = 0.$$

Mais comme A est strictement positive, on a $a_{i,j} > 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, et comme $|\vec{x}|$ est un vecteur propre il existe au moins une coordonnée x_{j_0} non nulle. On a alors :

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{i,j}|x_j|}_{\geqslant 0} \geqslant \underbrace{a_{i,j_0}}_{>0}\underbrace{|x_{j_0}|}_{>0} > 0,$$

ce qui contredit le fait établi plus haut que cette somme égale 0.

Par l'absurde, nous avons démontré que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a $x_i \neq 0$, et donc les coordonnées de $|\vec{x}| = (|x_1|, \dots, |x_n|)$ sont toutes strictement positives. Comme $|\vec{x}|$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1, nous avons bien démontré le résultat voulu.

Q 21. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A de module 1, et soit $\vec{x}$ un vecteur propre de A associé à λ. On a alors $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, et l'étude de la partie II.B montre qu'on a aussi $A|\vec{x}| = |\vec{x}|$. En combinant ces deux égalités, on obtient :

$$|\lambda\vec{x}| = |A\vec{x}| \iff |\lambda| \cdot |\vec{x}| = |A\vec{x}| \overset{[|\lambda|=1]}{\iff} |\vec{x}| = |A\vec{x}| \overset{[A|\vec{x}|=|\vec{x}|]}{\iff} A|\vec{x}| = |A\vec{x}|.$$

En regardant le i^{e} coefficient dans cette dernière égalité, il vient pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \overset{[a_{i,j}>0]}{\iff} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}x_j| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right|.$$

En utilisant le résultat admis dans l'énoncé (avec $z_j = a_{i,j}x_j$), on en déduit l'existence de $(\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,n}) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!], \quad a_{i,j}x_j = \lambda_{i,j}a_{i,1}x_1. \tag{8}$$

En particulier, cette relation impose que $x_1 \neq 0$, parce que dans le cas contraire on en déduirait $a_{i,j}x_j = 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, et donc $x_j = 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: impossible car $\vec{x} \neq \vec{0}$ en tant que vecteur propre.

En utilisant cette relation entre les x_j dans la première coordonnée de l'égalité $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j = \lambda x_1 \iff \sum_{j=1}^{n} \lambda_{1,j}a_{1,1}x_1 = \lambda x_1 \overset{[x_1\neq 0]}{\iff} a_{1,1}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{1,j} = \lambda.$$

Ainsi λ est une somme de réels positifs, donc est un réel positif. Or le seul réel positif à être de module égal à 1 est $\lambda = 1$: on en déduit que 1 est la seule valeur propre de A de module 1, d'où le résultat.

Q 22. En reprenant le raisonnement de la question précédente, mais cette fois-ci avec un vecteur propre $\vec{x}$ associé à la valeur propre 1, on note que l'égalité $x_j = \lambda_{i,j}\dfrac{a_{i,1}}{a_{i,j}}x_1$ implique que $x_1 \neq 0$ (sinon $x_j = 0$ pour tout j et $\vec{x}$ est dans ce cas nul : impossible pour un vecteur propre). Cela vaut pour tout vecteur propre de A associé à la valeur propre 1. Or il est facile de se convaincre que si deux vecteurs ont une première coordonnée non nulle, on peut trouver une combinaison linéaire de ces deux vecteurs qui annule la première coordonnée : l'existence de deux vecteurs propres associés à 1 et linéairement indépendants devrait, *via* une combinaison linéaire convenable, contredire le fait que la première coordonnée soit nécessairement non nulle, et donc aboutir à une contradiction.

Montrons-le plus précisément : d'abord, on sait que $\dim(\ker(A - I_n)) \geqslant 1$ vu qu'il existe bien des vecteurs propres associés à la valeur propre 1 d'après la question **Q 20**. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'on a : $\dim(\ker(A - I_n)) \geqslant 2$. Alors il existe une famille libre $(\vec{x}, \vec{y})$ de vecteurs propres associés à la valeur propre 1 ; comme on l'a dit plus haut, leurs premières coordonnées (notées x_1 et y_1 respectivement) sont non nulles. Dans ce cas, le vecteur :

$$\vec{z} = y_1\vec{x} - x_1\vec{y}$$

appartient à $\ker(A - I_n)$ parce que $\vec{x}, \vec{y} \in \ker(A - I_n)$ (un espace vectoriel est stable par combinaison linéaire), et il est non nul parce que l'égalité $\vec{z} = \vec{0}$ impliquerait que $(\vec{x}, \vec{y})$ est liée (vu que $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$), impossible par hypothèse sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$. On en déduit que c'est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1, et donc d'après ce que l'on a établi plus haut sa première coordonnée est non nulle. Pourtant, cette coordonnée est égale à :

$$y_1x_1 - x_1y_1 = 0,$$

ce qui est absurde. Nous avons une contradiction.

Par l'absurde, on a démontré que $\dim(\ker(A - I_n)) < 2$, et comme on sait qu'on a également $\dim(\ker(A - I_n)) \geqslant 1$ on en déduit : $\dim(\ker(A - I_n)) = 1$, d'où le résultat.

Q 23. En regroupant les résultats des questions **Q 20**, **Q 21** et **Q 22**, nous voyons que la proposition 1 est démontrée dans le cas où $\rho(A) = 1$. Pour le fait que $\rho(A)$ soit la valeur propre dominante, détaillons un peu : par définition de $\rho(A)$, pour toute valeur propre λ de A on a $|\lambda| \leqslant \rho(A) = 1$, et la question **Q 21** montre que seul $\lambda = 1$ vérifie le cas d'égalité, donc $|\lambda| < 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(A) \setminus \{1\}$.

À présent, si A est une matrice strictement positive quelconque, alors la matrice $A' = \dfrac{1}{\rho(A)}A$ est clairement strictement positive, et elle vérifie $\rho(A') = 1$ d'après la question **Q 13**, donc on peut lui appliquer tout ce qui précède pour en déduire :

- que 1 est valeur propre de A' ;
- que toutes les autres valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1 ;
- que $\ker(A' - I_n)$ est de dimension 1, engendré par un vecteur propre strictement positif.

Or on rappelle que les spectres de A et A' sont reliés par la relation (3), et qu'elle implique en particulier :

$$\mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}(\rho(A)A') = \{\rho(A)\lambda \mid \lambda \in \mathrm{sp}(A')\}.$$

Comme 1 est la valeur propre dominante de A' et que toute valeur propre de A est de la forme $\rho(A)\lambda$ avec $\lambda \in \mathrm{sp}(A')$, on en déduit aisément que $\rho(A)$ est valeur propre de A, et que c'est la valeur propre dominante de A. Il reste à justifier que $\ker(A - \rho(A)I_n)$

est de dimension 1, engendré par un vecteur propre strictement positif. Pour cela, on note que la relation (2) implique que les vecteurs propres de A associés à la valeur propre $\rho(A)$ sont exactement ceux de A' associés à la valeur propre 1, c'est-à-dire : $\ker(A-\rho(A)I_n) = \ker(A'-I_n)$. Comme ce dernier espace est de dimension 1 et engendré par un vecteur propre strictement positif, c'est aussi le cas de $\ker(A-\rho(A)I_n)$: d'où le résultat.

Nous avons donc démontré qu'une matrice A strictement positive quelconque vérifie aussi la proposition 1, ce qui était attendu.

II. D –

Q 24. Comme $Y \in \ker(A-\lambda I_n)$, on a $AY = \lambda Y$ puis, par une récurrence facile : $\forall p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $A^pY = \lambda^pY$. Par conséquent :

$$\forall p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad Y_p = \left(\frac{\lambda}{\rho(A)}\right)^p Y.$$

Comme $\lambda \in \mathrm{sp}(A)\setminus\{\rho(A)\}$, et que $\rho(A)$ est la valeur propre dominante de A d'après la proposition 1, on a $|\lambda| < \rho(A)$ et donc : $\left|\dfrac{\lambda}{\rho(A)}\right| < 1$. On en déduit : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{\lambda}{\rho(A)}\right)^p = 0$, et de là on conclut immédiatement que la suite $(Y_p)_{p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge vers $0_{\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$.

Q 25. D'abord, notons qu'effectivement, du fait que A soit supposée diagonalisable, on a :

$$\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{sp}(A)} E_\lambda(A) = E_{\rho(A)}(A) \oplus \bigoplus_{\lambda\in S} E_\lambda(A).$$

Par conséquent Y se décompose (de manière unique) dans cette somme directe : il existe $Y^{(\rho(A))} \in E_{\rho(A)}(A)$ et $Y^{(\lambda)} \in E_\lambda(A)$ pour tout $\lambda \in S$ tels que :

$$Y = \underbrace{Y^{(\rho(A))}}_{\in E_{\rho(A)}(A)} + \underbrace{\sum_{\lambda\in S} Y^{(\lambda)}}_{\in \bigoplus_{\lambda\in S} E_\lambda(A)}, \tag{9}$$

et par définition de ce qu'est une projection, $Y^{(\rho(A))}$ est le projeté de Y sur $E_{\rho(A)}(A)$ parallèlement à $\bigoplus\limits_{\lambda\in S} E_\lambda(A)$; à la lecture de la question, on comprend donc qu'on doit démontrer :

$$\lim_{p\to+\infty} Y_p = Y^{(\rho(A))}.$$

Pour cela, on note que l'égalité (9) implique immédiatement, après multiplication par $\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^p$:

$$\forall p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad Y_p = Y_p^{(\rho(A))} + \sum_{\lambda\in S} Y_p^{(\lambda)}.$$

D'après la question précédente, on a : $\forall \lambda \in S$, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} Y_p^{(\lambda)} = 0_{\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$. De plus, comme $Y^{(\rho(A))} \in E_{\rho(A)}(A)$ on a facilement :

$$\forall p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad A^pY^{(\rho(A))} = (\rho(A))^pY^{(\rho(A))},$$

et donc : $\forall p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $Y_p^{(\rho(A))} = Y^{(\rho(A))}$. En combinant tout ce qui précède, on a donc :

$$\lim_{p\to+\infty} Y_p = \lim_{p\to+\infty} Y_p^{(\rho(A))} + \sum_{\lambda\in S}\lim_{p\to+\infty} Y_p^{(\lambda)} = Y^{(\rho(A))} + \sum_{\lambda\in S} 0_{\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})} = Y^{(\rho(A))},$$

d'où la démonstration de la première partie de la question.

Il reste à démontrer que si $Y^{(\rho(A))} \neq 0_{\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$, alors ce vecteur est strictement positif : d'après la proposition 1, $E_{\rho(A)}(A)$ est de dimension 1 et engendré par un vecteur propre strictement positif ; comme $Y^{(\rho(A))}$ lui est nécessairement proportionnel, soit $Y^{(\rho(A))}$ est strictement positif, soit c'est $-Y^{(\rho(A))}$ qui l'est (selon que le coefficient de proportionnalité soit positif ou négatif). Pour exclure la seconde possibilité, on rappelle que Y est supposé positif dans cette question, et comme ses coordonnées tendent vers celles de $Y^{(\rho(A))}$, on en déduit que $Y^{(\rho(A))}$ est positif.

Par conséquent, des deux alternatives ci-dessus, seule la première est possible : le vecteur $Y^{(\rho(A))}$ est strictement positif, ce qui achève de démontrer le résultat.

II. E –

Q 26. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Comme toute matrice est triangulable dans $\mathbb{C}$ (une conséquence du théorème de D'Alembert-Gauß et du critère de trigonalisation), il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1},$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A, qui apparaissent autant de fois que leurs ordres de multiplicités. Alors :

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}^k P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & * \\ & \ddots & * \\ \mathbf{0} & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1},$$

ce qui démontre que A^k est semblable à une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A à la puissance k, qui apparaissent autant de fois que leurs ordres de multiplicités. En particulier :

$$\mathrm{sp}(A^k) = \left\{ \lambda^k \mid \lambda \in \mathrm{sp}(A) \right\}.$$

Q 27. Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a $\mathrm{tr}(A^k) > 0$ car $A^k > 0$ d'après la question **Q 12**. Pour déterminer la limite de $\dfrac{\mathrm{tr}(A^{k+1})}{\mathrm{tr}(A^k)}$ quand $k \to +\infty$, nous allons utiliser le fait que $\mathrm{tr}(A^k)$ soit, d'après la question précédente, la somme des valeurs propres de A à la puissance k, comptées avec multiplicités, sachant que la proposition 1 assure que $\rho(A)$ est la valeur propre dominante de A. Pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$, notons m_λ l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ, et soit $S = \mathrm{sp}(A) \setminus \{\rho(A)\}$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{\mathrm{tr}(A^{k+1})}{\mathrm{tr}(A^k)} = \frac{m_{\rho(A)}\rho(A)^{k+1} + \sum\limits_{\lambda \in S} m_\lambda \lambda^{k+1}}{m_{\rho(A)}\rho(A)^k + \sum\limits_{\lambda \in S} m_\lambda \lambda^k} = \rho(A) \frac{1 + \sum\limits_{\lambda \in S} \frac{m_\lambda}{m_{\rho(A)}} \left(\frac{\lambda}{\rho(A)}\right)^{k+1}}{1 + \sum\limits_{\lambda \in S} \frac{m_\lambda}{m_{\rho(A)}} \left(\frac{\lambda}{\rho(A)}\right)^k}.$$

Comme $\rho(A)$ est la valeur propre dominante de A, on a $\left|\dfrac{\lambda}{\rho(A)}\right| < 1$ pour tout $\lambda \in S$, et donc : $\forall \lambda \in S$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(\dfrac{\lambda}{\rho(A)}\right)^k = 0$. On en déduit :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\mathrm{tr}(A^{k+1})}{\mathrm{tr}(A^k)} = \rho(A),$$

ce qu'il fallait démontrer.

III – Une inégalité pour les chaînes de Markov

III. A –

Q 28. Soit $i \in [\![0, N]\!]$. La famille $((X_2 = j))_{j\in[\![0,N]\!]}$ est un système complet d'évènements, donc on a en particulier $\bigcup\limits_{j=0}^{N}(X_2 = j) = \Omega$, et par σ-additivité :

$$\sum_{j=0}^{N} q_{i,j} = \sum_{j=0}^{N} P\left(X_2 = j \mid X_1 = i\right) = P\left(\bigcup_{j=0}^{N}(X_2 = j) \mid X_1 = i\right) = P(\Omega \mid X_1 = i) = 1,$$

d'où le résultat.

Q 29. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $i \in [\![0, N]\!]$. La famille $((X_n = j))_{j\in[\![0,N]\!]}$ est un système complet d'évènements ; en utilisant la formule des probabilités totales avec ce système, on obtient :

$$P(X_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^{N} P\left(X_{n+1} = i \mid X_n = j\right) P(X_n = j).$$

Comme $Q^T = ((q_{j,i}))_{0\leqslant i,j\leqslant N} = ((P(X_{n+1} = i \mid X_n = j)))_{0\leqslant i,j\leqslant N}$ et $\Pi_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix}$, l'égalité ci-dessus peut se réécrire matriciellement : $\Pi_{n+1} = Q^T\Pi_n$, d'où le résultat.

Q 30. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note que la loi de probabilité de X_n est entièrement contenue dans le vecteur colonne Π_n. Or, en utilisant la question précédente et avec une récurrence facile, on obtient : $X_n = (Q^T)^{n-1}X_1$. Ainsi la loi de X_1 (et la donnée de Q^T) suffit à déterminer entièrement X_n.

III. B –

Q 31. Par hypothèse de l'énoncé, $q_{i,j} > 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, et l'exponentielle strictement positive sur $\mathbb{R}$. Par conséquent : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j}(t) = q_{i,j}e^{jt} > 0$, ce qui démontre que la matrice $A(t)$ est strictement positive. D'après la proposition 1, elle admet une valeur propre dominante $\gamma(t)$, égale à $\rho(A(t)) > 0$.

Q 32. D'après l'identité admise dans l'énoncé, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad E(e^{tS_n}) = \sum_{j=0}^{N} Y_j^{(n)}(t), \tag{10}$$

où les $Y_j^{(n)}$ sont définis par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad Y^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} Y_0^{(n)}(t) \\ \vdots \\ Y_N^{(n)}(t) \end{pmatrix} = (A(t))^{n-1}Z(t).$$

De plus la matrice $A(t)$ est strictement positive (nous l'avons établi dans la question précédente), donc d'après la proposition 2 la suite $\left(\left(\dfrac{A(t)}{\rho(A(t))}\right)^{n-1} Z(t)\right)_{n\geqslant 1}$ converge soit vers le vecteur nul, soit vers un vecteur strictement positif de $\ker(A(t) - \rho(A(t))I_n)$. En fait, la remarque faite à la fin de la partie II.D permet même d'exclure la positivité d'un vecteur limite nul : en effet $Z(t)$ est strictement positif. Si l'on note $x_0(t), \dots, x_N(t)$ les coordonnées de ce vecteur limite, on a donc :

$$\forall j \in [\![0, N]\!], \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\rho(A(t))}\right)^{n-1} Y_j^{(n)}(t) = x_j(t).$$

Donc, en divisant (10) par $(\rho(A(t)))^{n-1} = (\gamma(t))^{n-1} \neq 0$ et en prenant $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(e^{tS_n})}{(\gamma(t))^{n-1}} = \sum_{j=0}^{N} x_j(t).$$

Cela se réécrit de manière équivalente ainsi :

$$E(e^{tS_n}) = (\gamma(t))^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{N} x_j(t) + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \right).$$

On sait que $\gamma(t) > 0$ (question précédente) et que les $x_j(t)$ sont strictement positifs, donc leur somme également. On peut alors prendre le logarithme dans chaque membre de l'égalité ci-dessus, et obtenir :

$$\ln\left(E(e^{tS_n})\right) = (n-1)\ln(\gamma(t)) + \ln\left(\sum_{j=0}^{N} x_j(t) + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \right)$$

Après division par $n \neq 0$, on a :

$$\frac{\ln\left(E(e^{tS_n})\right)}{n} = \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \ln(\gamma(t)) + \underbrace{\frac{1}{n}\ln\left(\sum_{j=0}^{N} x_j(t) + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

On peut donc conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(E(e^{tS_n})\right)}{n} = \ln(\gamma(t)).$$

III. C –

Q 33. Suivant l'indication de passer par l'égalité $M^{2^{k+1}} = M^{2^k} \cdot M^{2^k}$, on construit le programme de façon récursive ainsi :

```
def puiss2k(M,k):
  if k==0:
    return M
  A=puiss2k(M,k-1)
  return np.dot(A,A)
```

Q 34. Cette fonction prend en entrée une matrice $Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, un entier k et un flottant t, et renvoie le quotient $\dfrac{\mathrm{tr}(A^{2^k+1})}{\mathrm{tr}(A^{2^k})}$, où : A est le produit de Q par $\begin{pmatrix} e^0 & e^t & e^{2t} & \cdots & e^{(n-1)t} \end{pmatrix}$.
Comme c'est rappelé dans l'énoncé dans la description de l'opération `*`, on ne parle pas du produit matriciel que l'on utilise traditionnellement en algèbre linéaire, mais du produit coefficient par coefficient de la matrice Q par la matrice $\begin{pmatrix} e^0 & e^t & e^{2t} & \cdots & e^{(n-1)t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^0 & e^t & e^{2t} & \cdots & e^{(n-1)t} \end{pmatrix}$.

Or, si l'on note $Q = ((q_{i,j}))_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1}$, alors ce produit a pour coefficient $(i,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$: $q_{i,j}e^{jt} = a_{i,j}(t)$. En conclusion, la sortie de cette fonction est :

$$\frac{\operatorname{tr}(A(t)^{2^k+1})}{\operatorname{tr}(A(t)^{2^k})}.$$

On devine que c'est en vue d'approcher $\gamma(t)$ (et donc $\lambda(t)$) grâce à la question **Q 27**.

III. D –

Q 35. Il est admis que la suite de fonctions $\left(t \mapsto \frac{\ln\left(E(e^{tS_n})\right)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers $t \mapsto \ln(\gamma(t))$. Autrement dit, si l'on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie sur $\mathbb{R}_+$:

$$\lim_{n \to +\infty} \left\| t \mapsto \frac{\ln\left(E(e^{tS_n})\right)}{n} - \ln(\gamma(t)) \right\|_\infty = 0.$$

Donc, par définition de la limite, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que, pour tout tout entier $n \geqslant n_0$, on ait :

$$\left\| t \mapsto \frac{\ln\left(E(e^{tS_n})\right)}{n} - \ln(\gamma(t)) \right\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Comme, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\left| \frac{\ln\left(E(e^{tS_n})\right)}{n} - \ln(\gamma(t)) \right| \leqslant \left\| t \mapsto \frac{\ln\left(E(e^{tS_n})\right)}{n} - \ln(\gamma(t)) \right\|_\infty$, l'inégalité ci-dessus implique :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left| \frac{\ln\left(E(e^{tS_n})\right)}{n} - \ln(\gamma(t)) \right| \leqslant \varepsilon.$$

En particulier, comme $x \leqslant |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, après multiplication de cette inégalité par n il vient :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \ln\left(E(e^{tS_n})\right) - n\ln(\gamma(t)) \leqslant n\varepsilon,$$

d'où le résultat voulu en ajoutant $n\ln(\gamma(t))$ à chaque membre de l'égalité.

Q 36. Soient $a > 1$, $n \geqslant n_0$ et $t \geqslant 0$. Comme $(S_n \geqslant nam) \subseteq \left(e^{tS_n} \geqslant e^{tnam}\right)$ (il y a même égalité de ces évènements si $t \neq 0$) et que la variable aléatoire e^{tS_n} est positive, on a d'après l'inégalité de Markov :

$$P(S_n \geqslant nam) \leqslant P\left(e^{tS_n} \geqslant e^{tnam}\right) \leqslant \frac{E(e^{tS_n})}{e^{tnam}}.$$

La question précédente implique : $E(e^{tS_n}) \leqslant e^{n(\lambda(t)+\varepsilon)}$, d'où le résultat voulu.

Q 37. Soient $a > 1$ et $n \geqslant n_0$. Par définition de λ^*, on a : $\lambda^*(am) = \sup\limits_{t \geqslant 0}(tam - \lambda(t))$. Et donc, après multiplication par $-n < 0$ et exponentiation :

$$e^{-n\lambda^*(am)} = \inf_{t \geqslant 0}\left(e^{-n(tam-\lambda(t))}\right) = \inf_{t \geqslant 0}\left(e^{-ntam+n\lambda(t)}\right).$$

Or, d'après la question précédente, on a :

$$P(S_n \geqslant nam)e^{-n\varepsilon} \leqslant e^{-n\varepsilon}e^{-tnam}e^{n(\lambda(t)+\varepsilon)} = e^{-tnam+n\lambda(t)},$$

ce qui montre que $P(S_n \geqslant nam)$ est un minorant de $e^{-tnam+n\lambda(t)}$ pour tout $t \geqslant 0$. Comme la borne inférieure d'une fonction est, par définition, le plus grand minorant de l'ensemble des valeurs prises par cette fonction, on en déduit :

$$P(S_n \geqslant nam)e^{-n\varepsilon} \leqslant \inf_{t\geqslant 0}\left(e^{-ntam+n\lambda(t)}\right) = e^{-n\lambda^*(am)},$$

d'où le résultat en multipliant par $e^{n\varepsilon} > 0$ et en écrivant : $e^{-n\lambda^*(am)} \cdot e^{n\varepsilon} = e^{-n(\lambda^*(am)-\varepsilon)}$.
J'ai implicitement utilisé le fait que $\lambda \sup f = \inf \lambda f$ si $\lambda < 0$, et que les bornes (supérieures ou inférieures) sont compatibles avec les fonctions croissantes, ici l'exponentielle. Je pense qu'il est acceptable de ne pas démontrer ces propriétés en détails, qui s'obtiennent par des manipulations élémentaires des propriétés d'une borne supérieure ou inférieure.

Q 38. On rappelle que $m = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(S_n)}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} E\left(\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)$. On peut interpréter l'espérance comme la moyenne théorique des valeurs prises par une variable aléatoire, et $\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ comme la moyenne empirique des variables aléatoires X_k entre 1 et n.
Par conséquent, si l'on se souvient que X_k compte le nombre d'erreurs pouvant être produites à l'instant k, alors m est le nombre *moyen* d'erreurs produites à chaque instant, que l'on devrait théoriquement observer asymptotiquement (quand $n \to +\infty$).
Dans ce contexte, l'inégalité (réécrite légèrement différemment) :

$$P\left(\frac{1}{n}S_n \geqslant am\right) \leqslant e^{-n(\lambda^*(am)-\varepsilon)}$$

majore la probabilité que le nombre moyen d'erreurs jusqu'à l'instant n dépasse la moyenne m théoriquement attendue, d'un facteur $a > 1$. Choisissons ε de sorte que $\lambda^*(am) - \varepsilon > 0$, ce qui est possible vu que $\lambda^*(am) > 0$ (c'est conséquence d'une propriété admise de l'énoncé) ; prenons par exemple $\varepsilon = \dfrac{\lambda^*(am)}{2}$. On a alors un rang n_0 au-delà duquel :

$$P\left(\frac{1}{n}S_n \geqslant am\right) \leqslant e^{-\frac{n\lambda^*(am)}{2}}, \text{ et en particulier : } \lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{1}{n}S_n \geqslant am\right) = 0.$$

Ainsi la probabilité de dépasser d'un facteur $a > 1$ la moyenne théorique du nombre d'erreurs est asymptotiquement nulle, et décroît par ailleurs à une vitesse exponentielle. C'est une raffinement dans un cas particulier de la loi faible des grandes nombres, qui d'une part nécessite que les variables aléatoires soient mutuellement indépendantes et de même loi, et d'autre part ne donne une décroissance de $P\left(\left|\dfrac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant (a-1)m\right)$ qu'à l'ordre $\dfrac{1}{n}$.

III. E –

Q 39. Au vu de l'énoncé, je pense qu'il n'est demandé qu'une approche qualitative.
Soit $i \in [\![1, L]\!]$. On a par définition :

$$\lambda^*(x_i) = \sup_{t\geqslant 0}(tx_i - \lambda(t)), \quad \hat{\lambda}^*(x_i) = \max_{1\leqslant j\leqslant K}(t_jx_i - \hat{\lambda}(t_j)),$$

et on nous dit que : $\hat{\lambda}(t_j) \approx \lambda(t_j)$ pour tout $j \in [\![1, K]\!]$. Alors :

$$\lambda^*(x_i) \approx \max_{1\leqslant j\leqslant K}(t_jx_i - \lambda(t_j)) \approx \max_{1\leqslant j\leqslant K}(t_jx_i - \hat{\lambda}(t_j)) \approx \hat{\lambda}^*(x_i),$$

d'où le résultat (il peut sembler hardi de substituer un maximum sur $\{t_j \mid j \in [\![1, K]\!]\}$ à $\sup\limits_{t\geqslant 0}$, mais les données ne permettent pas de justifier plus rigoureusement cette étape).

Q 40. Pour encadrer m, rappelons la propriété admise de l'énoncé :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \lambda^*(x) = 0 & \text{si } x \leqslant m, \\ \lambda^*(x) > 0 & \text{si } x > m, \end{cases}$$

En repérant, dans le tableau, à partir de quelle valeur de x_i la fonction λ^* cesse d'être « presque nulle » pour commencer à croître nettement, on trouve un encadrement de m. On en déduit :

$$4,70 \leqslant m \leqslant 4,75.$$

En outre : $5,17 \leqslant 1,1m \leqslant 5,225$. Comme la fonction λ^* est croissante (il ne poserait aucune difficulté de vérifier qu'effectivement, si $x \leqslant y$ alors $\lambda^*(x) \leqslant \lambda^*(y)$ en manipulant la définition), on en déduit :

$$\lambda^*(5,17) \leqslant \lambda^*(1,1m) \leqslant \lambda^*(5,225), \text{ donc : } \lambda^*(5,15) \leqslant \lambda^*(1,1m) \leqslant \lambda^*(5,25).$$

Si $\varepsilon > 0$ est un majorant de l'écart entre λ^* et $\hat{\lambda}^*$, c'est-à-dire : $\varepsilon = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant L} |\lambda^*(x_i) - \hat{\lambda}^*(x_i)|$, on peut utiliser les valeurs de $\hat{\lambda}$ en $5,15$ et $5,25$ (indiquées par le tableau 1) pour en déduire :

$$4,1 \cdot 10^{-2} - \varepsilon \leqslant \lambda^*(1,1m) \leqslant 5,1 \cdot 10^{-2} + \varepsilon.$$

Ainsi, pour déterminer un réel $h > 0$ tel qu'au-delà d'un certain rang n_0, on ait l'inégalité : $P(S_n > 1,1nm) \leqslant e^{-nh}$, nous pouvons partir de l'inégalité de la question **Q 37** qui donne ici :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \ \forall n \geqslant n_0, \quad P(S_n > 1,1nm) \leqslant e^{-n(4,1 \cdot 10^{-2} - 2\varepsilon)}.$$

Il suffit alors de choisir un réel $h > 0$ tel que : $4,1 \cdot 10^{-2} - 2\varepsilon \geqslant h$. *A priori* ε n'est pas connu ; mais le tableau 1 permet de conjecturer la valeur $\varepsilon \approx 4,1 \cdot 10^{-12}$, puisque c'est la valeur de $\hat{\lambda}^*(x_i)$ pour tout $x_i \leqslant m$ tandis qu'on a $\lambda^*(x_i) = 0$ pour ces mêmes x_i (cette conjecture part du principe cavalier que la marge d'erreur est la même en tous les x_i). Pour ce choix de ε, il suffit donc de choisir $h > 0$ tel que $4,1 \cdot (10^{-2} - 2 \cdot 10^{-12}) \geqslant h$ pour avoir l'inégalité voulue.

Concluons : on choisit $h = 4,1 \cdot 10^{-2} \,(1 - 2 \cdot 10^{-10})$. Alors d'après ce qui précède, il existe $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait :

$$P(S_n > 1,1nm) \leqslant e^{-n(4,1 \cdot 10^{-2} - 2\varepsilon)} = e^{-nh},$$

d'où le résultat.